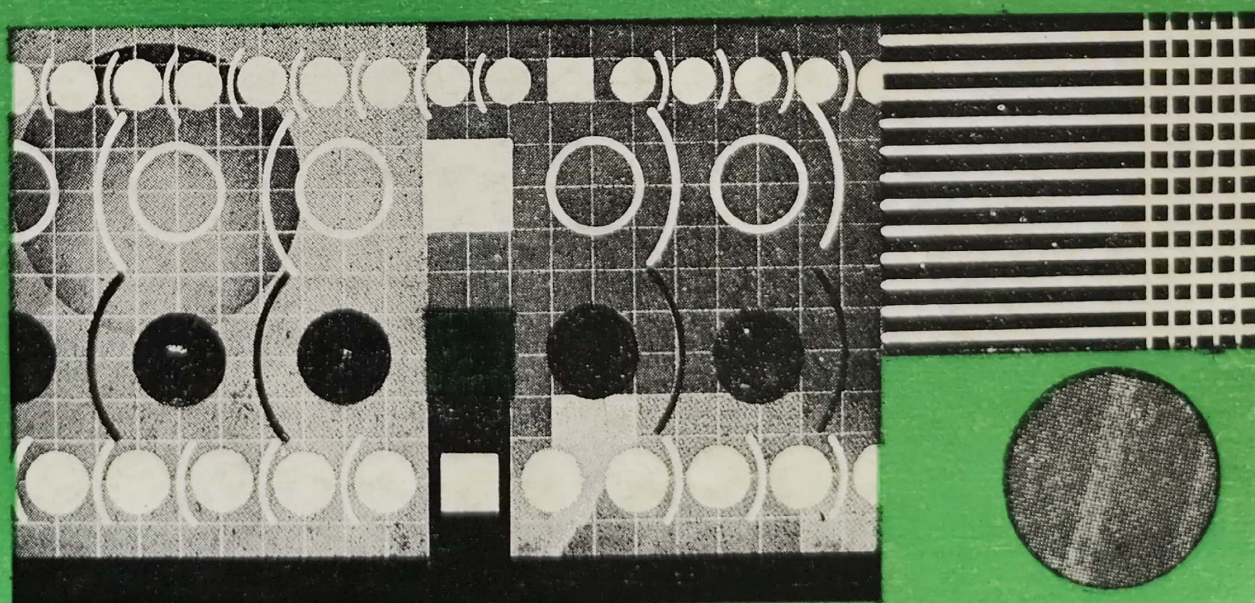


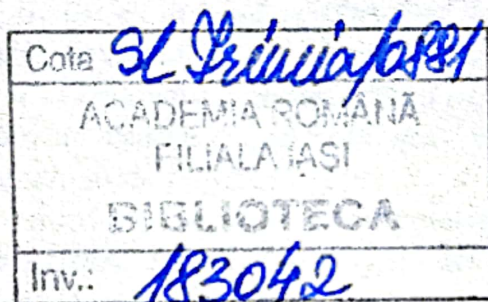
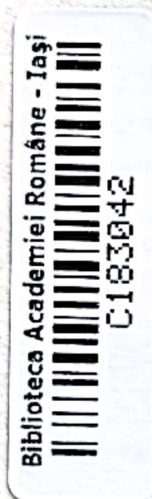
St. Iulian 6881

Gheorghe Păun

Gramatici contextuale



GRAMATICI CONTEXTUALE



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București, 1982

CONTEXTUAL GRAMMARS

КОНТЕКСТУАЛЬНЫЕ ГРАММАТИКИ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
R 79717, Bucureşti, Calea Victoriei nr. 125



PREFATĂ

În perioada 1—4 septembrie 1969 a avut loc la Sânga-Säby, lângă Stockholm, o Conferință internațională de lingvistică computațională, de tipul celor care se țin periodic, la fiecare doi ani. Ca membru în Comitetul de program al acestei manifestări științifice, am putut cunoaște dinainte lucrările care urmau să fie prezentate. Mi-am dat astfel seama, dar din păcate era prea târziu, că lucrarea „Gramatici contextuale”, pe care o elaborasem în vederea prezentării la această conferință (și care a fost publicată, ca și celelalte acceptate, sub formă de preprint de către Grupul de lingvistică de la Stockholm, condus de Hans Karlgren), nu corespundea prea bine profilului conferinței, interesată cu precădere în utilizarea directă a calculatorului în cercetarea limbilor naturale. Ulterior, am republicat lucrarea într-o revistă de matematică (a se vedea [42] de la bibliografia cărții de față), dar de fapt motivațiile care mă conduseseră la elaborarea ei erau mai degrabă de ordin lingvistic decât matematic. Eram încă obsedat de aprofundarea unor chestiuni de bază ale lingvisticii descriptive (în maniera lui Z. Harris), dar acum se adăuga interesul pentru convertirea acestor chestiuni într-un cadru generativ. Ideile de context, distribuție și tipuri de distribuție ocupau un loc central în *Introduction mathématique à la linguistique structurale*, pe care o publicasem în 1967 la editura Dunod (Paris), și mi se părea că o continuare firească trebuie să se refere la mecanismele generative asociate acceptării anumitor secvențe de către anumite contexte. O problemă similară se pune și în ceea ce privește omonimia gramaticală contextuală. Aceste idei au fost prezentate în lucrarea [43] din bibliografia cărții de față. Era vorba aici de gramatici generative „intrinseci”, în sensul că nu se făcea apel la un alfabet auxiliar. S-a întâmplat însă că nici până azi să nu se producă joncțiunea acestor gramatici cu problematica limbilor naturale sau cu a limbajelor de programare. În schimb, după cum se poate vedea în sinteza de față, întreprinsă de Gh. Păun, doctor în matematici și cercetător principal la Colectivul de studiul sistemelor al Facultății de matematică a Universității din București, problema gramaticilor contextuale a reținut atenția unor cercetători de formație logico-algebrică, preocupați de teoria limbajelor formale. Fără îndoială însă că ponderea cea mai mare o au, în studiul gramaticilor contextuale, rezultatele obținute de Gh. Păun, care era astfel cel mai calificat pentru a elabora această monografie. Îi exprim aici viile mele mulțumiri pentru satisfacția pe care mi-o produce prin sinteza unor cercetări pornite din modesta mea lucrare din 1969, dar depășind-o net pe aceasta prin amploare și profunzime.

*În ceea ce privește cealaltă propunere pe care o făcusem în 1969, legată de studiul generării unui limbaj prin categoriile gramaticale pe care i le impunem, singurul ecou pe care-l cunosc este articolul lui Alexandru Rubin (Asupra determinării unui limbaj formal prin mulțimea categoriilor sale morfologice, *Studii și cercetări matematice*, 28, 3, (1976), 355—363). Mă întreb dacă cele două tipuri de gramatici nu ar putea fi corelate, ținând seamă de faptul că, în ultimă instanță, amândouă au aceeași idee de bază: acceptarea unei secvențe de către un context.*

SOLOMON MARCUS

CUPRINS

Introducere	9
CAPITOLUL 1. Noțiuni și rezultate din teoria limbajelor formale	11
CAPITOLUL 2. Gramaticii contextuale Marcus	22
CAPITOLUL 3. Puterea generativă a gramaticilor contextuale Marcus	26
3.1. Condiții necesare pentru ca un limbaj să fie contextual de diferite tipuri	26
3.2. Relațiile dintre familiile de limbaje contextuale	30
3.3. Relațiile dintre familiile de limbaje contextuale și familiile din ierarhia lui Chomsky	32
3.4. Relații între familiile de limbaje contextuale și familiile de limbaje matriciale	38
3.5. Gramatici 3-contextuale	39
CAPITOLUL 4. Proprietăți de închidere la operații cu limbaje	43
CAPITOLUL 5. Probleme de decizie	56
CAPITOLUL 6. Complexitatea sintactică a limbajelor contextuale	62
CAPITOLUL 7. Gramaticii contextuale cu restricții în derivare	69
7.1. Gramatici contextuale matriciale	69
7.2. Gramatici contextuale programate	71
7.3. Gramatici contextuale controlate	74
7.4. Gramatici contextuale condiționale	77
CAPITOLUL 8. Variante ale gramaticilor contextuale	84
8.1. Gramatici v-contextuale	84
8.2. Gramatici contextuale regulate	87
8.3. Gramatici contextuale cu selectivitate mărginită	89
8.4. Gramatici de ramificare	93
CAPITOLUL 9. Gramaticii n -contextuale	100
9.1. Puterea generativă a gramaticilor n -contextuale	100
9.2. Proprietăți ale familiilor de limbaje n -contextuale	107
9.3. Gramatici n -contextuale condiționale	110
9.4. Scheme n -contextuale	119

CAPITOLUL 10. Alte probleme privind gramaticile și limbajele contextuale	127
10.1. Monoidul sintactic al limbajelor contextuale	127
10.2. Compunerea gramaticilor contextuale	128
10.3. Reprezentări ale limbajelor contextuale.	132
10.4. Forme gramaticale contextuale	135
10.5. Proprietatea prefixului pentru limbajele contextuale.	137
10.6. Automate contextuale	138
10.7. Comparația cu ξ -gramaticile lui L. Nebesky	143
10.8. Caracterizarea limbajelor contextuale cu ajutorul ecuațiilor	144
Bibliografie	147
Summary	151
Contents	153

INTRODUCERE

Teoria limbajelor formale s-a născut în deceniul al șaselea al secolului nostru, odată cu introducerea de către matematicianul și lingvistul american Noam Chomsky a gramaticilor care îi poartă numele ([8], [9]). Obiectivul inițial al lui Chomsky a fost modelarea gramaticilor limbilor naturale, generarea limbilor naturale cu ajutorul unor gramatici formale. Gramaticile Chomsky s-au dovedit apoi deosebit de utile în formalizarea și manipularea limbajelor de programare evolute ([3], [46]). Cu această dublă sursă de probleme, teoria limbajelor formale s-a dezvoltat rapid, ajungând în anii '60 o teorie matematică bine conturată, „cu calități estetice intrinseci, independentă de motivările exterioare” [15].

Din păcate, în forma lor inițială, gramaticile Chomsky nu au corespuns întru totul așteptărilor. Mai exact, multe limbae interesante (porțiuni semnificative ale limbilor naturale, majoritatea limbajelor de programare [16], limbajele care descriu dezvoltarea unor organisme filiforme pluricelulare etc.) s-au dovedit a nu fi independente de context (o familie de limbae cu proprietăți „rezonabile”), ci dependente de context în sensul lui Chomsky. A apărut astfel necesitatea considerării unor noi tipuri de gramatici. Se pot desprinde două direcții principale în care s-a mers spre diversificarea mecanismelor generative: *modificarea gramaticilor lui Chomsky* astfel încât gramatici cu reguli de rescriere simple să poată genera limbae complicate și *introducerea de gramatici specializate*, adecvate unor categorii bine precizate de limbae. Prima direcție este ilustrată de cele peste douăzeci de tipuri de gramatici cu restricții în derivare (a se vedea cap. V din [87] și monografia [80]), iar a doua de sistemele Lindenmayer ([28], [39]), de gramaticile de adjuncție ([36]), precum și de alte tipuri de gramatici mai puțin cunoscute (a se vedea [42] și [43]).

Lucrarea de față se ocupă de unul dintre cele mai interesante tipuri de gramatici specializate și anume de *gramaticile contextuale*, introduse de profesorul Solomon Marcus în anul 1969 [42]. Aceste gramatici modelează și se bazează în mod esențial pe fenomenul de acceptare de către un context a unei fraze în raport cu un limbaj dat. Fenomenul este prezent în orice limbaj, fie el natural sau artificial, dar este de o mare importanță în studiul limbilor naturale. Într-adevăr, lingvistica algebrică se ocupă în mare măsură tocmai cu studiul dominării contextuale a frazelor, cu construirea de modele bazate pe asemenea relații de dominare contextuală în raport cu un limbaj dat.

În cei doisprezece ani care au trecut de la introducerea lor, gramaticile contextuale au constituit obiectul a numeroase cercetări. S-au propus numeroase variante, s-au întreprins aplicații, s-au lămurit o serie de probleme teoretice. Bibliografia domeniului numără deja peste cincizeci de lucrări și sînt

în curs cercetări promițătoare. Poate că lucrarea de față va da un impuls nou acestor cercetări. Ea înglobează într-un cadru unitar marea majoritate a rezultatelor obținute pînă acum în legătură cu studiul gramaticilor și limbajelor contextuale, prezintă un mare număr de rezultate noi, unificatoare și generalizatoare, scoate în evidență direcțiile în care s-a lucrat mai puțin și formulează un mare număr de probleme deschise (identificate cu P1, P2, ..., P 31).

În general, studiul gramaticilor contextuale se desfășoară pe aceleași linii ca și studiul gramaticilor Chomsky: putere generativă, proprietăți de închidere la operații ale diferitelor familii de limbaje contextuale, probleme de decizie, restricții în derivare, complexitate sintactică etc. Există, de asemenea, o serie de probleme specifice. Puterea generativă a gramaticilor contextuale va fi comparată constant cu cea a gramaticilor Chomsky.

Capitolul 1 este o introducere sumară în teoria limbajelor formale, în intenția de a face lucrarea cît mai independentă din acest punct de vedere; capitolele 2 — 10 prezintă rezultate teoretice asupra gramaticilor contextuale. Fiecare capitol se încheie cu indicații bibliografice care trimit la locul primei apariții a rezultatelor sau indică rezultate care nu au mai putut fi introduse în lucrare.

Multe din rezultatele din lucrare, precum și redactarea finală, au fost puternic influențate de discuții îndelungate și rodnice cu profesorul Solomon Marcus, inițiatorul teoriei gramaticilor și limbajelor contextuale. (De altfel, așa cum a propus lingvistul canadian Barron Brainerd, credem că este indicat să vorbim despre *gramatici Marcus*, la fel cum se vorbește despre gramatici Chomsky și sisteme Lindenmayer.) Amintim aici și discuțiile deosebit de utile cu profesorul Miroslav Novotny din Brno, cu dr. Sorin Istrail din Iași și cu dr. Nguyen Xuan My din Hanoi, trei dintre autorii cu contribuții esențiale la dezvoltarea teoriei limbajelor contextuale.

Autorul ar fi deosebit de îndatorat cititorului pentru orice observație asupra lucrării (mai ales pentru răspunsuri la problemele deschise formulate sau pentru rezultate înrudite).

NOȚIUNI ȘI REZULTATE DIN TEORIA LIMBAJELOR FORMALE

Orice mulțime finită și nevidă de simboluri abstracte se numește *alfabet*. Dacă $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ este un alfabet, atunci orice secvență de forma $x = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$, $m \geq 0$, $a_{i_j} \in V$ pentru orice j , se numește *cuvînt* peste V . Lungimea lui x se notează cu $|x|$ și este egală cu m . Cuvîntul de lungime nulă se notează cu λ . Mulțimea tuturor cuvintelor formate cu simboluri din alfabetul V se notează cu V^* . Definim pe V^* operația de *concatenare* astfel: dacă $x = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$ și $y = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r}$, atunci $xy = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r}$. Se vede că V^* este monoidul liber generat de V cu operația de concatenare și elementul neutru λ . Mulțimea $V^* - \{\lambda\}$ se notează cu V^+ .

De obicei vom folosi ca sinonime cuvintele „alfabet” și „vocabular”, precum și „cuvînt”, „frază”, „șir”, „secvență”.

Fie $x, y \in V^*$. Dacă $y = uxv$, $u, v \in V^*$, atunci se spune că x este *subcuvînt* (subfrază, subșir) al lui y ; dacă $y = xv$, atunci x este *prefix* al lui y , iar dacă $y = ux$, atunci x este *sufix* al lui y . Pentru $y \in V^*$ vom nota cu $Sub(y)$, $Pref(y)$, $Suf(y)$, mulțimea subcuvintelor, prefixelor și, respectiv, a sufixelor lui y .

Orice submulțime, $L \subseteq V^*$, pentru V fixat, se numește *limbaj* peste vocabularul V ; V^* se numește limbajul universal peste V .

O pereche $\langle u, v \rangle$ cu $u, v \in V^*$ se numește *context*. Contextul $\langle u, v \rangle$ acceptă șirul $x \in V^*$ în raport cu un limbaj $L \subseteq V^*$ precizat (sau x este acceptat de către contextul $\langle u, v \rangle$) dacă și numai dacă $uxv \in L$.

Operații cu limbaje. Fie $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un alfabet fixat. Deoarece limbajele peste V sînt mulțimi de șiruri, putem defini *reuniunea*, *intersecția*, *diferența* și *complementara* față de V^* în modul uzual. Vom nota aceste operații, respectiv, cu $\cup$, $\cap$, $-$, $\complement$. Există însă o serie de operații specifice limbajelor ca mulțimi de șiruri. În general, orice operație unară cu șiruri, $\alpha: V^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$, se extinde la limbaje peste V prin

$$\alpha(L) = \bigcup_{x \in L} \alpha(x)$$

iar o operație binară cu șiruri, $\beta: V^* \times V^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$, se extinde la o operație binară cu limbaje prin

$$\beta(L_1, L_2) = \bigcup_{\substack{x \in L_1 \\ y \in L_2}} \beta(x, y).$$

De exemplu, concatenarea a două limbaje $L_1, L_2 \subseteq V^*$ este operația

$$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Dacă $x = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}$ este un șir peste vocabularul V , atunci răsturnatul lui x va fi șirul $R(x) = a_{i_r} a_{i_{r-1}} \dots a_{i_2} a_{i_1}$. Atunci, pentru $L \subseteq V^*$ obținem

$$R(L) = \{R(x) \mid x \in L\}.$$

Operațiile *Sub*, *Pref*, *Suf* se extind la limbaje după același model. Pentru $L \subseteq V^*$ se definește închiderea Kleene a sa prin

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i,$$

unde $L^0 = \{\lambda\}$ iar $L^{i+1} = L^i L$, $i \geq 1$. Vom nota $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$. Se observă că notațiile L^* , L^+ sînt consistente cu V^* , V^+ precizate la începutul capitolului. (Pentru limbajele care nu conțin cuvîntul nul — numite și limbaje λ -libere — avem $L^+ = L^* - \{\lambda\}$, egalitate valabilă și pentru vocabulare.)

Fie acum două vocabulare V și U și fie $s: V \rightarrow \mathcal{P}(U^*)$ o aplicație pe care o extindem la V^* prin $s(\lambda) = \{\lambda\}$, $s(xy) = s(x)s(y)$, $x, y \in V^*$. Aplicația s se extinde la limbaje prin $s(L) = \bigcup_{x \in L} s(x)$. Se spune că s este o substituție.

Dacă avem $\text{cards}(a) < \infty$ pentru orice $a \in V$, atunci s se numește substituție finită, iar dacă avem $\text{cards}(a) = 1$ pentru orice $a \in V$, atunci s se numește homomorfism și se scrie $s(a) = x$ în loc de $s(a) = \{x\}$. Dacă $\lambda \notin s(a)$ pentru orice $a \in V$, atunci s se numește substituție λ -liberă (respectiv, homomorfism λ -liber). Un homomorfism $h: V^* \rightarrow U^*$ pentru care există o constantă k astfel încît $k|h(x)| \geq |x|$ pentru orice $x \in V^*$ se numește homomorfism cu ștergere (cel mult) liniară. Dacă $h: V^* \rightarrow U^*$ este un homomorfism, atunci aplicația $h^{-1}: U^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ definită prin $h^{-1}(x) = \{y \mid h(y) = x\}$, $x \in U^*$, se numește homomorfism invers (asociat lui h).

Cîtul stîng al unui limbaj L_1 în raport cu un limbaj L_2 este definit prin $L_2 \setminus L_1 = \{x \mid yx \in L_1, y \in L_2\}$. Dacă $L_2 = \{x\}$, $x \in V^*$, atunci se scrie $\partial_x(L_1)$ în loc de $L_2 \setminus L_1$; spunem că am calculat derivata stîngă a lui L_1 în raport cu x . În mod analog se definesc cîtul și derivata dreaptă:

$$L_1/L_2 = \{x \mid xy \in L_1, y \in L_2\}, \quad \partial_x^d(L_1) = \{y \mid yx \in L_1\}.$$

Fie $\mathcal{L}$ o familie arbitrară de limbaje, α o operație unară cu limbaje iar β o operație binară cu limbaje. Se spune că familia $\mathcal{L}$ este închisă la operația α (respectiv, β) dacă și numai dacă pentru orice $L \in \mathcal{L}$ (respectiv, $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$) avem $\alpha(L) \in \mathcal{L}$ ($\beta(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$). O familie $\mathcal{L}$ este închisă la substituții cu limbaje dintr-o familie $\mathcal{L}'$ dacă și numai dacă oricare ar fi $L \in \mathcal{L}$, $L \subseteq V^*$ și $s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(U^*)$ o substituție astfel încît $s(a) \in \mathcal{L}'$ pentru orice $a \in V$, atunci $s(L) \in \mathcal{L}$. Familia $\mathcal{L}$ se zice închisă la substituție dacă ea este închisă la substituții cu limbaje din ea însăși.

Gramatici generative de tip Chomsky. La modul general, o gramatică este un dispozitiv finit cu ajutorul căruia se pot identifica obiecte (în cazul nostru,

limbaje) nu neapărat finite. O gramatică Chomsky este un quadruplu $G = (V_N, V_T, S, P)$; unde V_N și V_T sînt vocabulare disjuncte, $S \in V_N$ iar P este o mulțime finită inclusă în produsul cartezian $V_G^* V_N V_G^* \times V_G^*$. (Am notat $V_G = V_N \cup V_T$.) Elementele vocabularului V_N se numesc simboluri neterminale (pe scurt, neterminali), cele ale lui V_T se numesc simboluri terminale (terminali), S este axioma gramaticii (simbolul de start), iar perechile (x, y) din P se numesc reguli de rescriere (pe scurt, reguli) și se scriu sub forma $x \rightarrow y$.

Pe mulțimea V_G^* se definește următoarea relație în raport cu gramatica G : pentru $x, y \in V_G^*$ scriem $x \xrightarrow{G} y$, sau simplu $x \Rightarrow y$ dacă G se subînțelege, dacă și numai dacă $x = x_1 x_2 x_3$, $y = x_1 x_4 x_3$, $x_1, x_3 \in V_G^*$ și $x_2 \rightarrow x_4 \in P$. Se spune că x derivează direct în y în raport cu gramatica G . Notăm cu $\xRightarrow{*}$ prelungirea reflexivă și tranzitivă a relației $\Rightarrow$. Limbajul generat de gramatica G este

$$L(G) = \{x \in V_G^* \mid S \xRightarrow{*} x\}.$$

După forma regulilor din P , gramaticile Chomsky se clasifică astfel:

a) gramatici de tip 0 — gramaticile în forma de mai sus, fără nici o restricție asupra regulilor;

b) gramatici monotone (de tip 1) — conțin numai reguli de forma $x \rightarrow y$ cu $|x| \leq |y|$;

c) gramatici dependente de context — toate regulile din P sînt de forma $xAy \rightarrow xzy$, $x, y, z \in V_G^*$, $z \neq \lambda$, $A \in V_N$;

d) gramatici independente de context (de tip 2) — conțin numai reguli de forma $A \rightarrow x$, $A \in V_N$, $x \in V_G^*$;

e) gramatici liniare — cu reguli de forma $A \rightarrow x$, sau $A \rightarrow yBz$, $A, B \in V_N$, $x, y, z \in V_T^*$;

f) gramatici drept (stîng)-liniare — cu toate regulile de forma $A \rightarrow x$ sau $A \rightarrow yB$ (respectiv, $A \rightarrow By$), cu $A, B \in V_N$, $x, y \in V_T^*$;

g) gramatici regulate (de tip 3) — cu reguli de forma $A \rightarrow a$ sau de forma $A \rightarrow bB$, $A, B \in V_N$, $a, b \in V_T$.

Se observă că de la a) la g) restricțiile asupra regulilor sînt din ce în ce mai puternice. Deoarece gramaticile monotone nu pot conține reguli cu membrul drept nul (deci nu pot genera șirul nul λ), se introduce următoarea regulă de completare: într-o gramatică monotonă (deci și în toate tipurile mai restrictive) se admite o regulă de forma $S \rightarrow \lambda$ cu condiția ca axioma S să nu apară în membrul drept al nici unei reguli. O gramatică monotonă în care nu apar λ -reguli (cu excepția unei reguli $S \rightarrow \lambda$ ca mai sus) se numește λ -liberă. Două gramatici care generează același limbaj se numesc echivalente.

Se știe că gramaticile de tip b) și c) generează aceeași familie de limbaje, lucru adevărat și pentru gramaticile de tip f) și g). Vom nota cu $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, familiile limbajelor generate de gramaticile de tip i și cu $\mathcal{L}_{lin}$ familia limbajelor liniare. Se cunosc următoarele incluziuni stricte

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_{lin} \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0.$$

Șirul anterior de incluziuni este cunoscut sub numele de ierarhia lui Chomsky.

Celor patru familii $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ (familiile de bază ale ierarhiei), corespund patru tipuri de gramatici, le corespund patru tipuri de automate care recunosc exact limbajele din aceste familii. Aceste automate sînt: mașina Turing (corespunde limbajelor de tip 0), automatul liniar mărginit (corespunde limbajelor de tip 1), automatul cu pilă de memorie (auto-

matul push down, corespunzător limbajelor independente de context) și *automatul finit* (recunoaște limbajele regulate). Nu vom prezenta aici decât automatul finit, pentru celelalte trimițând la [22], [87].

Un *automat finit nedeterminist* este un 5-uplu $A = (K, V, \delta, s_0, F)$ unde K și V sînt mulțimi finite, nevide și disjuncte, $F \subseteq K$, $s_0 \in K$ și $\delta : K \times V \rightarrow \mathcal{P}(K)$. V este vocabularul automatului, K este mulțimea stărilor, s_0 este starea inițială, iar F este mulțimea stărilor finale. Dacă $\delta(s, a) \in K$ sau $\delta(s, a) = \emptyset$ pentru orice $s \in K$, $a \in V$, atunci automatul A se zice determinist. Pe mulțimea $K \times V^*$ se definește relația $\vdash$ astfel: pentru $s, s' \in K$, $a \in V$, punem $(s, ax) \vdash (s', x)$ dacă și numai dacă $s' \in \delta(s, a)$. Fie $\vdash^*$ prelungirea reflexivă și tranzitivă a relației $\vdash$. Limbajul recunoscut de automatul A este atunci

$$L(A) = \{x \in V^* \mid (s_0, x) \vdash^* (s, \lambda), s \in F\}.$$

Din punct de vedere fizic, un automat finit poate fi imaginat ca fiind format dintr-o bandă infinită pe care se scrie un șir peste vocabularul V (cîte un simbol în fiecare căsuță a benzii), un cap de citire și o memorie susceptibilă de a se afla la fiecare moment într-o stare din mulțimea K . Automatul pleacă din starea inițială cu capul de citire fixat asupra simbolului din extrema stîngă a șirului de pe bandă și mută capul de citire spre dreapta schimbîndu-și starea pînă ce epuizează șirul. Dacă ajunge într-o stare finală, atunci șirul inițial este recunoscut.

Se știe că automatele finite deterministe și nedeterministe recunosc aceeași familie de limbaje și anume $\mathcal{L}_3$.

Un tip de dispozitiv înrudit cu automatele finite și care are numeroase aplicații este *traducătorul secvențial generalizat*. (Vom folosi prescurtarea consacrată, *gsm*, de la „generalized sequential machine”). Un *gsm* este un sistem $g = (K, V_1, V_2, \delta, s_0, F)$ unde K, s_0, F sînt ca la automatele finite, V_1 și V_2 sînt două vocabulare (V_1 este vocabularul de intrare iar V_2 este vocabularul de ieșire), iar $\delta : K \times V_1 \rightarrow \mathcal{P}(V_2^* \times K)$ este funcția de mișcare a lui g . Pentru $x, z \in V_2^*$, $a \in V_1$, $y \in V_1^*$, $s, s' \in K$ astfel încît $(z, s') \in \delta(s, a)$ se scrie $(x, s, ay) \vdash (xz, s', y)$. Pentru $w \in V_1^*$ definim

$$g(w) = \{z \in V_2^* \mid (\lambda, s_0, w) \vdash^* (z, s, \lambda), s \in F\}.$$

Aplicația g se extinde în mod natural la limbaje în V_1^* .

De multe ori este comod ca funcția δ din definiția automatelor finite sau a *gsm*-urilor să fie precizată sub forma unei mulțimi de reguli de rescriere: în loc de $s' \in \delta(s, a)$ considerăm regula $sa \rightarrow as'$, iar în loc de $(z, s') \in \delta(s, a)$ considerăm regula $sa \rightarrow zs'$. Automatul finit devine astfel un caz particular de *gsm*, relațiile $\vdash, \vdash^*$ se reduc la $\Rightarrow, \Rightarrow^*$ dintr-o gramatică de o formă particulară și, pentru un *gsm* g , se definește

$$g(x) = \{z \in V_2^* \mid s_0 x \Rightarrow^* zs, s \in F\}.$$

Se poate vedea ușor că dacă o familie de limbaje este închisă la aplicațiile induse de *gsm*-uri (spunem că este închisă la *aplicații gsm*), atunci ea este închisă la substituții finite (deci și la homomorfisme), precum și la operațiile *Sub*, *Pref*, *Suf*. Și alte operații cu limbaje sînt dependente unele de altele. Un cadru unitar de tratare a proprietăților de închidere la operații a diferitelor familii de limbaje este furnizat de *familiiile abstracte de limbaje* (pe scurt, *FAL*). O familie de limbaje care conține cel puțin un limbaj diferit de $\emptyset$ și

$\{\lambda\}$ și care este închisă la reuniune, homomorfisme λ -libere, homomorfisme inverse și la intersecție cu limbaje regulate se numește *semi-FAL*. Dacă se realizează închiderea la homomorfisme arbitrare, atunci spunem că avem un *semi-FAL complet*. Un *semi-FAL (complet)* închis și la concatenare și la operația $+$ se numește *FAL (complet)*.

Familiile $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ sînt *FAL complete*, iar $\mathcal{L}_1$ este *FAL*. Familia $\mathcal{L}_{lin}$ este *semi-FAL complet* (nu este închisă la concatenare și la operația $+$). Tabelul 1.1 indică unele rezultate de închidere la operații pentru aceste cinci familii (DA semnifică închiderea familiei respective la operația corespunzătoare liniei, NU semnifică neînchiderea, iar ? semnalizează o problemă nerezolvată încă).

O familie de limbaje care conține cel puțin un limbaj diferit de $\emptyset$ și $\{\lambda\}$ și care nu este închisă la nici una dintre cele șase operații care caracterizează un *FAL* se numește *anti-FAL*.

Probleme de decizie. Fie $\mathcal{G}$ o clasă de gramatici. Un predicat cu variabile în $\mathcal{G}$ se numește problemă de decizie asupra lui $\mathcal{G}$. O asemenea problemă este decidabilă algoritmic (pe scurt, decidabilă) dacă și numai dacă există un unic algoritm care dă răspuns la întrebarea dacă predicatul respectiv este adevărat sau nu pentru elemente arbitrare din $\mathcal{G}$. Iată cîteva probleme de decizie mai importante referitoare la gramatici:

PD1 (*problema echivalenței*): Sînt două gramatici $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ echivalente?

Tabelul 1.1

Operația	Familia	$\mathcal{L}_0$	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_{lin}$	$\mathcal{L}_3$
Reuniune		DA	DA	DA	DA	DA
Concatenare		DA	DA	DA	NU	DA
$\star$ $+$		DA	DA	DA	NU	DA
Intersecție		DA	DA	NU	NU	DA
Complementară		NU	?	NU	NU	DA
Intersecție cu limbaje regulate		DA	DA	DA	DA	DA
Răsturnare		DA	DA	DA	DA	DA
Substituție		DA	NU	DA	NU	DA
Substituție λ -liberă		DA	DA	DA	NU	DA
Substituție cu limbaje regulate		DA	NU	DA	DA	DA
Substituție cu limbaje regulate λ -libere		DA	DA	DA	DA	DA
Homomorfisme		DA	NU	DA	DA	DA
Homomorfisme λ -libere		DA	DA	DA	DA	DA
Homomorfisme cu ștergere liniară		DA	DA	DA	DA	DA
Homomorfisme inverse		DA	DA	DA	DA	DA
Aplicații <i>gsm</i>		DA	NU	DA	DA	DA
Aplicații <i>gsm</i> λ -libere		DA	DA	DA	DA	DA
Aplicații <i>gsm</i> inverse		DA	DA	DA	DA	DA
Cîtul stîng cu limbaje regulate		DA	NU	DA	DA	DA
Cîtul drept cu limbaje regulate		DA	NU	DA	DA	DA
Derivata stîngă		DA	DA	DA	DA	DA
Derivata dreaptă		DA	DA	DA	DA	DA
Sub, Pref, Suf		DA	NU	DA	DA	DA

PD2 (*problema incluziunii*): Pentru $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ avem $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

PD3 (*problema apartenenței*): Pentru $G \in \mathcal{G}$ și $x \in V^*$, un șir arbitrar, avem $x \in L(G)$ sau nu?

PD4 (*problema finitudinii*): Limbajul $L(G)$, $G \in \mathcal{G}$, este finit sau nu?

PD5 (*problema trivialității*): Limbajul $L(G)$, $G \in \mathcal{G}$, este nevid?

Se pot imagina și alte probleme de decizie, dar le vom preciza atunci când le vom studia pentru gramaticile contextuale. Referitor la cele patru familii de bază din ierarhia lui Chomsky, sînt cunoscute rezultatele de decizabilitate din tabelul 1.2 (pentru problemele anterioare), unde D indică o problemă decizabilă, iar N o problemă nedecizabilă pentru clasa de gramatici corespunzătoare familiei de limbaje asociată coloanei respective din tabel.

Tabelul 1.2

Familia Problema	$\mathcal{L}_0$	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$
PD1	N	N	N	D
PD2	N	N	N	D
PD3	N	D	D	D
PD4	N	N	D	D
PD5	N	N	D	D

Să remarcăm că dacă avem două clase de gramatici, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, în relația $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, atunci orice problemă nedecizabilă în raport cu $\mathcal{G}_1$ va fi nedecizabilă și în raport cu $\mathcal{G}_2$, iar orice problemă decizabilă în raport cu $\mathcal{G}_2$ va fi decizabilă și pentru $\mathcal{G}_1$. Limbajele generate de cea mai largă clasă de gramatici pentru care problema apartenenței este decizabilă se numesc *recursive*. Familia limbajelor recursive se notează cu $\mathcal{L}_{rec}$. Există următoarele incluziuni stricte: $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{rec} \subset \mathcal{L}_0$.

În general, demonstrarea faptului că o problemă de decizie asupra unei clase de gramatici este nedecizabilă se reduce la următoarea problemă, cunoscută sub numele de *problema corespondenței lui Post*. Fie V un vocabular cu cel puțin două elemente și fie x și y două n -upluri de cuvinte nenule peste V , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Problema lui Post cere să se răspundă la întrebarea dacă există sau nu o secvență de numere $i_1, i_2, \dots, i_k$, $1 \leq i_j \leq n$, astfel încît $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}$. Teorema lui Post din [84] spune că problema anterioară nu este decizabilă.

Condiții necesare. În general, faptul că anumite incluziuni între familii de limbaje sînt stricte, precum și unele proprietăți de neînchidere la operații se demonstrează prin indicarea de contraexemple. În găsirea unor asemenea contraexemple sînt utile condiții necesare pentru ca un limbaj să fie de un anumit tip și caracterizările limbajelor din anumite familii date. Vom formula în continuare cîteva condiții necesare și caracterizări pentru familiile din ierarhia lui Chomsky. Ele vor fi utile mai tîrziu, iar unele vor putea fi extinse și la limbajele contextuale de anumite tipuri.

Fie V un vocabular și fie $L \subseteq V^*$. Fie $M_L(x)$ mulțimea contextelor care îl acceptă pe x în raport cu limbajul L , adică $M_L(x) = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V^*, u x v \in L \}$. Dacă $x, y \in V^*$, atunci scriem $x \delta_L y$ dacă și numai dacă $M_L(x) = M_L(y)$.

Teorema 1.1. Un limbaj $L \subseteq V^*$ este regulat dacă și numai dacă V^*/δ_L este o mulțime finită.

Teorema 1.2. Dacă $L \subseteq V^*$ este un limbaj liniar, atunci există două limbaje regulate $L_1, L_2 \subseteq V^*$ astfel încât

- i) $L \subseteq L_1 L_2$,
- ii) oricare ar fi $x \in L_1 (y \in L_2)$ există $y \in L_2$ (respectiv, $x \in L_1$) astfel încât $xy \in L$.

Fie $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și pentru $x \in V^*$ fie $N(a_i, x)$ numărul aparițiilor simbolului a_i în șirul x . Definim aplicația

$$\Psi_V(x) = (N(a_1, x), N(a_2, x), \dots, N(a_n, x))$$

și extindem aplicația Ψ_V la limbaje $L \subseteq V^*$ prin

$$\Psi_V(L) = \{\Psi_V(x) \mid x \in L\}.$$

Ψ_V se numește *aplicația lui Parikh* asociată vocabularului V . Două limbaje $L_1, L_2 \subseteq V^*$ pentru care $\Psi_V(L_1) = \Psi_V(L_2)$ se numesc *echivalente în litere*.

Teorema 1.3. Oricare ar fi $L_1 \in \mathcal{L}_2, L_1 \subseteq V^*$, există $L_2 \in \mathcal{L}_3, L_2 \subseteq V^*$, echivalent în litere cu limbajul L_1 .

Corolar. Pe vocabularul cu un singur element orice limbaj independent de context este regulat.

Să considerăm acum mulțimea n -uplurilor ordonate de întregi nenegativi și să definim adunarea a două n -upluri și înmulțirea cu un întreg, în mod uzual, termen cu termen. O mulțime S de asemenea n -upluri se zice *liniară* dacă există n -uplurile $v_0, v_1, \dots, v_k, k \geq 0$, astfel încât orice n -uplu din S este de forma

$$v_0 + \sum_{i=1}^k x_i v_i, x_i \in \mathbb{N}.$$

O reuniune finită de mulțimi liniare se numește mulțime *semiliniară*.

Teorema 1.4. (Teorema lui Parikh). Oricare ar fi $L \in \mathcal{L}_2, L \subseteq V^*$, mulțimea $\Psi_V(L)$ este semiliniară.

Teorema 1.5. (Teorema lui Ogden) Oricare ar fi $L \in \mathcal{L}_2, L \subseteq V^*$, există un întreg $k \geq 1$ astfel încât dacă $z \in L, |z| > k$ și dacă cel puțin k apariții de simboluri din z sînt considerate marcate, atunci z se poate scrie sub forma $z = uvwxy$ astfel încât

- (1) w conține cel puțin un simbol marcat,
- (2) sau atît u cît și v conțin un simbol marcat, sau atît x cît și y conțin asemenea simboluri,
- (3) vw conține cel mult k simboluri marcate,
- (4) $uv^iwx^i y \in L$ pentru orice $i \geq 0$.

Teorema 1.6. (Lema lui Bar-Hillel, teorema $uvwxy$, teorema de pompă etc.) Oricare ar fi $L \in \mathcal{L}_2, L \subseteq V^*$, există întregii $p, q \geq 0$ astfel încât oricare ar fi $z \in L$ cu $|z| > p$ există $u, v, w, x, y \in V^*$ cu proprietățile

- (1) $z = uvwxy$,
- (2) $|vx| > 0, |vw| \leq q$,
- (2) $uv^iwx^i y \in L$ pentru orice $i \geq 0$.

Corolar. Dacă $L \in \mathcal{L}_2$ este un limbaj infinit, atunci mulțimea $lg(L) = \{|x| \mid x \in L\}$ conține o progresie aritmetică infinită.

Pentru limbajele regulate are loc următorul rezultat, caz particular al teoremei anterioare. Oricare ar fi $L \in \mathcal{L}_3$, $L \subseteq V^*$, există întregii p, q cu proprietatea că oricare ar fi $z \in L$, $|z| > p$, există $u, v, x \in V^*$ astfel încît $z = uvx$, $|vx| \leq q$, $|v| > 0$ și $uv^i x \in L$ pentru orice $i \geq 0$.

Cu ajutorul condițiilor anterioare (și construind gramatici adecvate pentru propozițiile afirmative) se pot demonstra, de pildă, următoarele relații:

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_{lin} - \mathcal{L}_3 \text{ (se folosește teorema 1.1)}$$

$$L_2 = L_1 L_1 \in \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{lin} \text{ (teorema 1.2)}$$

$$L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \text{ (teorema 1.6)}$$

$$L_4 = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \text{ (corolarul teoremei 1.6)}$$

$$L_5 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \text{ (corolarul teoremei 1.6)}$$

$$L_6 = \{a^n \mid n \text{ număr prim}\} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \text{ (corolarul teoremei 1.6)}$$

$$L_7 = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 1\} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \text{ (teorema 1.6)}$$

$$L_8 = \{a^n b^m \mid n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n\} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \text{ (teorema 1.4)}$$

$$L_9 = \{a^n b^m c^p \mid 1 \leq n \leq m \leq p\} \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \text{ (teorema 1.5)}$$

$L_{10} \in \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{lin}$ (teorema 1.2) unde L_{10} este limbajul lui Dyck peste vocabularul $\{a_1, a'_1\}$, adică limbajul generat de gramatica independentă de context $G = (\{S\}, \{a_1, a'_1\}, S, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow a_1 S a'_1, S \rightarrow \lambda\})$. (Limbajul lui Dyck se mai poate defini și ca fiind mulțimea șirurilor peste vocabularul $\{a_1, a'_1\}$ care pot fi reduse la șirul nul prin ștergerea repetată ale unor subșiruri $a_1 a'_1$.)

Teoreme de reprezentare.

Teorema 1.7. *Orice limbaj $L \in \mathcal{L}_0$ se poate scrie sub forma $L = h(L_1 \cap L_2)$, unde L_1 și L_2 sînt limbaje independente de context iar h este un homomorfism.*

Pentru un vocabular $V_n = \{a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots, a_n, a'_n\}$, $n \geq 1$, să considerăm limbajul D_n generat de gramatica $G = (\{S\}, V_n, S, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \lambda\} \cup \{S \rightarrow a_i S a'_i \mid 1 \leq i \leq n\})$. Limbajul D_n se numește limbaj al lui Dyck peste vocabularul V_n (L_{10} este deci limbajul D_1 peste V_1).

Teorema 1.8. *Orice limbaj independent de context L se poate scrie sub forma $L = h(D_n \cap R)$ unde h este un homomorfism, D_n este limbajul lui Dyck peste un vocabular V_n , iar R este un limbaj regulat.*

Teorema spațiului de lucru. Precizăm acum un rezultat cu frecvente utilizări în capitolele următoare. În esență, el spune că dacă o gramatică de tip 0 nu face „prea multe” ștergeri, atunci ea generează un limbaj de tip 1.

Fie $G = (V_N, V_T, S, P)$ o gramatică de tip 0. Pentru o derivare

$$D: S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = y, y \in V_T^*$$

definim

$$WS(D, G) = \max_{0 \leq i \leq n} |w_i|$$

iar pentru un șir $y \in L(G)$ punem

$$WS(y, G) = \min \{WS(D, G) \mid D \text{ este o derivare a lui } y \text{ în raport cu gramatica } G\}.$$

Spunem că gramatica G are spațiul de lucru mărginit dacă și numai dacă există un număr natural k astfel încît, pentru orice $x \in L(G)$, să avem $WS(x, G) \leq k|x|$.

Teorema 1.9. *Dacă o gramatică G are spațiul de lucru mărginit, atunci $L(G) \in \mathcal{L}_1$.*

Măsuri ale complexității sintactice. Un limbaj dat poate fi generat de către o infinitate de gramatici diferite. În aplicații este firesc să căutăm gramatici cât mai simple posibil. În acest scop avem nevoie de măsuri ale complexității sintactice. Fie $\mathcal{G}$ o clasă de gramatici și fie $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ familia limbajelor generate de gramaticile din $\mathcal{G}$. În principiu, o măsură a complexității gramaticilor din $\mathcal{G}$ este o aplicație $K: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$. Extinzând această aplicație la limbaje prin $K(L) = \min \{K(G) \mid L = L(G), G \in \mathcal{G}\}$ obținem o aplicație $K: \mathcal{L}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{N}$ care evaluează complexitatea sintactică a limbajelor din familia $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Iată câteva asemenea măsuri pentru limbajele independente de context. Fie $G = (V_N, V_T, S, P)$ o gramatică independentă de context. Definim

$$\text{Var}(G) = \text{card } V_N$$

$$\text{Prod}(G) = \text{card } P$$

$\text{Simb}(G) = \sum_{r \in P} \text{Simb}(r)$, unde $\text{Simb}(r) = |x| + 2$ dacă regula r este de forma $A \rightarrow x$.

Fie acum $D: S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_k$ o derivare în raport cu gramatica G și fie $N(w_i)$ numărul de apariții de simboluri neterminale în șirul w_i . Definim *indexul* derivării prin

$$\text{Ind}(D, G) = \max_{1 \leq i \leq k} N(w_i).$$

Indexul șirului $x \in L(G)$ în raport cu gramatica G va fi

$\text{Ind}(x, G) = \min \text{Ind}(D, G)$, minimul luându-se după toate derivările D ale lui x în raport cu gramatica G .

Atunci, indexul gramaticii G va fi

$$\text{Ind}(G) = \sup \{\text{Ind}(x, G) \mid x \in L(G)\}.$$

Asupra unei măsuri K a complexității sintactice a gramaticilor și limbajelor dintr-o anumită clasă se pun în mod natural următoarele probleme:

- Q1. Se poate calcula algoritmic $K(G)$ pentru G arbitrară?
- Q2. Se poate calcula algoritmic $K(L(G))$ pentru G arbitrară?
- Q3. Se poate decide algoritmic dacă $K(L(G)) = n$ pentru G și n arbitrară?

Q4. Se poate decide dacă $K(G) = K(L(G))$ pentru G arbitrară?
(Se poate decide dacă G este cea mai simplă gramatică pentru limbajul $L(G)$ cu privire la K ?)

Q5. Pentru o gramatică arbitrară G se poate construi algoritmic o gramatică echivalentă G' astfel încât $K(G') = K(L(G))$? (Se poate construi algoritmic cea mai simplă gramatică în raport cu măsura K pentru limbajul $L(G)$?)

Pentru măsurile Prod , Var , Simb , Ind considerate mai sus toate problemele anterioare au răspunsul negativ cu excepția problemei Q1 pentru Prod , Var , Simb care au răspunsul afirmativ și a problemei Q4 pentru Prod care este încă nerezolvată.

Gramatici cu restricții în derivare. Până acum aplicarea unei reguli depinde exclusiv de apariția membrului ei stâng în șirul de derivat. Se pot însă impune condiții suplimentare care să controleze aplicarea regulilor. Vom defini numai câteva asemenea tipuri de gramatici care ne vor fi utile în restul lucrării.

O *gramatică matricială* este un quadruplu $G = (V_N, V_T, S, M)$ unde V_N, V_T și S sînt ca într-o gramatică Chomsky obișnuită, iar M este o mulțime de secvențe de forma $m: (A_1 \rightarrow x_1, \dots, A_n \rightarrow x_n)$, $n \geq 1$, $A_i \in V_N$, $x_i \in V_G^*$ (numite matrici de reguli). Pentru $x, y \in V_G^*$ punem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă există $w_1, w_2, \dots, w_{n+1}$ în V_G^* astfel încît $w_1 = x$, $w_{n+1} = y$, $w_i = u_i A_i v_i$, $w_{i+1} = u_i z_i v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, unde $(A_1 \rightarrow z_1, \dots, A_n \rightarrow z_n) \in M$. Atunci, definim în mod uzual

$$L(G) = \{x \in V_G^* \mid S \xRightarrow{*} x\}.$$

Notăm cu $\mathcal{M}^\lambda$ mulțimea limbajelor generate de gramaticile matriciale arbitrare și cu $\mathcal{M}$ pe cea a limbajelor generate de gramaticile matriciale λ -libere. Se știe că $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{L}_1$, incluziunile fiind stricte, dar nu se cunoaște relația dintre $\mathcal{M}^\lambda$ și $\mathcal{L}_1$.

O *gramatică programată* este o pereche (G, φ) unde $G = (V_N, V_T, S, P)$ este o gramatică independentă de context iar $\varphi: P \rightarrow \mathcal{P}(P)$. Limbajul $L(G, \varphi)$ este format din acele șiruri din $L(G)$ care au derivări de forma

$$S \xRightarrow{r_1} w_1 \xRightarrow{r_2} w_2 \Rightarrow \dots \xRightarrow{r_n} w_n$$

cu $r_i \in \varphi(r_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots, n$.

Notăm cu $\mathcal{P}^\lambda$ mulțimea limbajelor generate de gramaticile programate arbitrare și cu $\mathcal{P}$ pe cea a limbajelor generate de gramaticile programate λ -libere.

O *gramatică controlată* este o pereche (G, C) unde $G = (V_N, V_T, S, P)$ este o gramatică independentă de context iar C este un limbaj peste vocabularul $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, unde r_i sînt etichete pentru regulile din P . Limbajul $L(G, C)$ este format din toate șirurile din $L(G)$ care au derivări de forma

$$S \xRightarrow{r_{i_1}} w_1 \xRightarrow{r_{i_2}} w_2 \Rightarrow \dots \xRightarrow{r_{i_k}} w_k$$

cu $r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} \in C$.

Notăm cu $\mathcal{F}^\lambda$ mulțimea limbajelor generate de gramatici arbitrare cu limbajul de control regulat, iar cu $\mathcal{F}$ notăm mulțimea limbajelor corespunzătoare gramaticilor λ -libere.

Sînt adevărate următoarele egalități

$$\mathcal{M} = \mathcal{P} = \mathcal{F} \quad \mathcal{M}^\lambda = \mathcal{P}^\lambda = \mathcal{F}^\lambda.$$

O *gramatică condițională* este o pereche (G, φ) unde $G = (V_N, V_T, S, P)$ este o gramatică independentă de context iar $\varphi: P \rightarrow \mathcal{P}(V_G^*)$. Pentru $x, y \in V_G^*$ punem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $x \xRightarrow{r} y$ în raport cu gramatica G și $x \in \varphi(r)$.

Notăm cu $\mathcal{K}^\lambda$ familia limbajelor generate de gramaticile condiționale arbitrare cu limbajele $\varphi(r)$ regulate și cu $\mathcal{K}$ familia limbajelor generate de gramaticile condiționale λ -libere cu limbajele $\varphi(r)$ regulate. Avem egalitățile

$$\mathcal{K}^\lambda = \mathcal{L}_0 \quad \mathcal{K} = \mathcal{L}_1.$$

Pentru toate aceste familii de limbaje putem defini măsuri ale complexității sintactice. Măsura *Ind* se dovedește a conduce la rezultate foarte interesante atunci cînd cerem finitudinea sa. Notăm cu $\mathcal{M}_f$ familia limbajelor generate de gramatici matriciale de index finit. (Prezența λ -regulilor nu are

nici o importanță în sensul că nu modifică puterea generativă a gramaticilor matriciale de index finit. [78])

O clasă interesantă de gramatici matriciale este cea a gramaticilor *simplu matriciale*. O asemenea gramatică (de ordin n) este un $(n+3)$ -uplu $G = (V_1, \dots, V_n, V_T, S, M)$, unde $V_1, \dots, V_n, V_T$ sînt vocabulare finite disjuncte și nevide, $S \notin V_N \cup V_T$ (am notat $V_N = \bigcup_{i=1}^n V_i$), iar M conține matrici de următoarele forme:

$$a) (S \rightarrow w_1 w_2 \dots w_n),$$

$$b) (A_1 \rightarrow w_1, \dots, A_n \rightarrow w_n)$$

unde $A_i \in V_i$, $w_i \in (V_i \cup V_T)^*$ și toate șirurile w_i dintr-o matrice conțin același număr de apariții de simboluri din V_i (adică $N(w_i) = N(w_j)$ pentru orice i, j). Pentru $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ astfel încît $x_i, y_i \in (V_i \cup V_T)^*$, $x_i = u_i A_i v_i$, $u_i \in V_T^*$, $v_i \in (V_i \cup V_T)^*$, $y_i = u_i w_i v_i$ pentru $(A_1 \rightarrow w_1, \dots, A_n \rightarrow w_n) \in M$ scriem $x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow y_1 y_2 \dots y_n$. De asemenea, scriem $S \Rightarrow w_1 w_2 \dots w_n$ dacă $(S \rightarrow w_1 w_2 \dots w_n) \in M$. Atunci

$$L(G) = \{x \in V_T^* \mid S \xRightarrow{*} x\}.$$

Notăm cu $\mathcal{SM}(n)$ familia limbajelor simplu matriciale de ordin n , $n \geq 1$, și cu $\mathcal{SM}$ familia tuturor limbajelor simplu matriciale.

Dacă toate regulile neterminale de tipul b) sînt de forma

$$b') (A_1 \rightarrow w_1 B_1, \dots, A_n \rightarrow w_n B_n), A_i, B_i \in V_i, w_i \in V_T^*,$$

atunci gramatica G se numește *simplu matricială regulată*. Familiile obținute se notează cu $\mathcal{SMR}(n)$, respectiv, $\mathcal{SMR}$. Avem incluziunile stricte

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{SMR} \subset \mathcal{SM} \subset \mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{SM}.$$

Vom preciza unele proprietăți ale familiilor $\mathcal{M}$, și $\mathcal{SM}$ atunci cînd ne vor fi necesare. De asemenea, alte noțiuni și rezultate din teoria limbajelor formale le vom aminti atunci cînd le vom utiliza. În general, trimitem la cartea [87] pentru precizări suplimentare; pot fi folosite și monografiile [3], [17], [22]. Teoremele 1.3, 1.4, 1.6—1.9 pot fi găsite în [87], iar teorema 1.5 apare în [3]. Alte rezultate de tipul teoremei 1.1 pot fi găsite în [40]. Pentru studiul familiilor abstracte de limbaie trimitem la [18]. Amănunte privind măsurile complexității sintactice ale limbajelor independente de context pot fi găsite în [23], [24], [25]. Gramaticile matriciale au fost introduse în [1], cele programate în [85], iar gramaticile condiționale sînt studiate în [35], [47]. Capitolul V din [87] studiază familiile $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ și $\mathcal{F}$. Puterea generativă a gramaticilor condiționale este investigată și în [77]. Monografia [80] este dedicată investigării gramaticilor matriciale și înrudite cu acestea.

GRAMATICI CONTEXTUALE MARCUS

Vom începe prin a defini cele trei tipuri de gramatici contextuale introduse în [42], apoi vom considera gramaticile contextuale interioare definite în [83]. Vom da numai definiții și exemple de limbaje pe care aceste gramatici le generează.

Definiția 2.1. O gramatică contextuală simplă este un triplet $G = (V, B, C)$ unde V este un vocabular (reamintim că orice vocabular este finit și nevid), B este un limbaj finit peste V iar C este o mulțime finită de contexte peste V . Limbajul B se numește *baza* gramaticii.

În [42] limbajul generat de gramatica G se definește ca fiind cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ care are următoarele două proprietăți:

- i) $B \subseteq L$,
- ii) dacă $x \in L$ și $\langle u, v \rangle \in C$, atunci $uxv \in L$.

Vom nota acest limbaj cu $L(G)$. Putem defini limbajul $L(G)$ în alte două moduri diferite și anume, direct

$$L(G) = B \cup \{u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, 1 \leq i \leq n\}$$

sau prin intermediul unei relații de derivare. Într-adevăr, pentru $x, y \in V^*$ să scriem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $y = uxv$ pentru $\langle u, v \rangle \in C$. Notăm cu $\stackrel{\star}{\Rightarrow}$ închiderea reflexivă și tranzitivă a relației $\Rightarrow$ și definim

$$L(G) = \{x \in V^* \mid \text{există } z \in B \text{ astfel încât } z \stackrel{\star}{\Rightarrow} x\}.$$

Faptul că cele trei definiții sînt echivalente este vizibil; în considerațiile ulterioare vom folosi pe rînd una sau alta dintre ele, în funcție de comoditatea lor. În legătură cu ultima definiție, secvența $z \Rightarrow u_1 z v_1 \Rightarrow u_2 u_1 z v_1 v_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n \dots u_1 z v_1 \dots v_n = x$ se numește *derivare* a lui x plecînd de la z . Evident, derivarea respectivă este complet identificată de secvența $z, \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle$.

Limbajele generate de gramaticile contextuale simple se numesc limbaje contextuale simple și mulțimea lor se notează cu $\mathcal{C}$.

Exemple. 2.1. Limbajul vid este în familia $\mathcal{C}$ deoarece el este generat de orice gramatică $G = (V, \emptyset, C)$, C mulțime arbitrară.

2.2. Limbajul universal V^* este în $\mathcal{G}$ deoarece el este generat de gramatica contextuală simplă $G = (V, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\})$.

2.3. Orice limbaj finit F este în familia $\mathcal{G}$. Într-adevăr, gramaticile $G_F = (V, F, \emptyset)$, $G'_F = (V, F, \{\langle \lambda, \lambda \rangle\})$ generează exact pe F .

2.4. Gramatica $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle a, b \rangle\})$ generează limbajul neregulat

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

Definiția 2.2. O gramatică contextuală generalizată este un quadruplu $G = (V, B_1, B_2, C)$ unde V și C sînt ca într-o gramatică contextuală simplă iar B_1, B_2 sînt limbaie finite peste vocabularul V .

Și pentru aceste gramatici putem defini limbajul generat în cele trei moduri. Preferăm definirea explicită a șirurilor sale, adică

$$L(G) = B_1 \cup \{u_n \dots u_1 x y^n v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B_1, y \in B_2, \langle u_i, v_i \rangle \in C, 1 \leq i \leq n\}.$$

Spre deosebire de cazul gramaticilor contextuale simple, de data aceasta adăugarea unui context la extremitățile șirurilor este însoțită de adăugarea unui subșir y din B_2 ; se adaugă atîtea subșiruri y cîte contexte s-au folosit.

Vom nota cu $\mathcal{G}$ familia limbajelor generate de gramaticile contextuale generalizate.

Exemple. 2.5. Orice limbaj contextual simplu este limbaj contextual generalizat. Într-adevăr, dîndu-se o gramatică contextuală simplă $G = (V, B, C)$, gramatica contextuală generalizată $G' = (V, B, \{\lambda\}, C)$ generează, evident, același limbaj ca gramatica G . Toate limbajele din exemplele 2.1 — 2.4 sînt deci în familia $\mathcal{G}$.

2.6. Limbajul neindependent de context

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

este în familia $\mathcal{G}$. Pentru aceasta, să considerăm gramatica contextuală generalizată $G = (\{a, b, c\}, \{\lambda\}, \{b\}, \{\langle a, c \rangle\})$. Egalitatea $L = L(G)$ este imediată.

În gramaticile anterioare adăugarea de contexte se face fără restricții, situație care nu se întîlnește în limbile naturale (și nici în altfel de limbaie). De aceea, în [42] se consideră și

Definiția 2.3. O gramatică contextuală selectivă este un quadruplu $G = (V, B, C, \varphi)$ unde (V, B, C) formează o gramatică contextuală simplă iar $\varphi: V^* \rightarrow \mathcal{P}(C)$. În [42] limbajul generat de gramatica G este definit ca fiind cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ pentru care

i) $B \subseteq L$,

ii) dacă $x \in L$, $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$ și $z \in B$, atunci $uxv \in L$, $zx \in L$, $xz \in L$.

(Notăm acest limbaj cu $L_0(G)$.)

Această definiție pare mult prea restrictivă deoarece impune ca limbajul B^+ să fie inclus în $L_0(G)$. În felul acesta, sau $L_0(G)$ este infinit, sau este vid, sau conține șirul nul λ ; limbajele finite nevide care nu conțin pe λ nu pot fi deci generate cu asemenea gramatici. Există astfel limbaie contextuale simple care nu sînt contextuale selective. Urmînd [60], [64], vom considera o altă definiție a limbajului generat de G , și anume

Definiția 2.4. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă. Limbajul generat de gramatica G este cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ pentru care

i) $B \subseteq L$,

ii) dacă $x \in L$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$, atunci $uxv \in L$.

Notăm acest limbaj cu $L(G)$.

Propoziția 2.1. Orice limbaj generat de o gramatică contextuală selectivă în sensul definiției 2.3. este generat de o asemenea gramatică și în sensul definiției 2.4, dar reciproca nu este adevărată.

Demonstrație. Reciproca nu este adevărată deoarece orice limbaj contextual simplu (deci și orice limbaj finit) poate fi generat de o gramatică contextuală selectivă în sensul definiției 2.4. Într-adevăr, fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă și fie $G' = (V, B, C, \varphi)$ cu $\varphi(x) = C$ pentru orice $x \in V^*$. Evident, $L(G') = L(G)$.

Fie acum $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă. Construim gramatica

$$G' = (V, B, C \cup \{\langle \lambda, z \rangle, \langle z, \lambda \rangle \mid z \in B\}, \varphi')$$

unde, pentru orice $x \in V^*$ punem $\varphi'(x) = \varphi(x) \cup \{\langle \lambda, z \rangle, \langle z, \lambda \rangle \mid z \in B\}$. Egalitatea $L_0(G) = L(G')$ este evidentă, deci și prima afirmație din enunț este verificată.

De acum înainte vom lucra numai cu limbajul $L(G)$, definit ca în definiția 2.4, deci de forma

$$L(G) = B \cup \{u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B, \langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(x),$$

$$\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(u_{i-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{i-1}), i = 2, 3, \dots, n\}.$$

Notăm cu $\mathcal{S}$ familia limbajelor contextuale selective (în sensul definiției 2.4).

Exemple. 2.7. Limbajul $L = \{a^n \mid n \geq 1\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$ poate fi generat cu gramatica contextuală selectivă $G = (\{a, b\}, \{a, b\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\}, \varphi)$, unde

$$\varphi(a^i) = \{\langle \lambda, a \rangle\}, i \geq 0,$$

$$\varphi(b^i) = \{\langle \lambda, b \rangle\}, i \geq 0,$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

2.8. Limbajul $L = \{a^n \mid n \neq 2^k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ este în familia $\mathcal{S}$. Într-adevăr, fie gramatica $G = (\{a\}, \{a^3\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, a^2 \rangle\}, \varphi)$ cu

$$\varphi(a^i) = \{\langle \lambda, a \rangle\} \text{ dacă } i + 1 \neq 2^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\varphi(a^i) = \{\langle \lambda, a^2 \rangle\} \text{ dacă } i + 1 = 2^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Egalitatea $L(G) = L$ rezultă imediat din modul de definire a funcției de selecție φ .

În gramaticile contextuale simple, generalizate și selective adăugarea de contexte nu se poate face decât la extremitățile șirurilor. Așa cum vom vedea mai jos, acest fapt face ca limbaje simple $\{ab^n a \mid n \geq 1\}$, de exemplu) să nu poată fi generate cu asemenea gramatici. De aceea, în [83] s-a propus

Definiția 2.5. O gramatică contextuală interioară este un triplet $G = (V, B, C)$ cu componentele ca în considerațiile anterioare și cu limbajul generat definit ca fiind cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ pentru care

i) $B \subseteq L$,

ii) dacă $x \in L$, $x = x_1 x_2 x_3$ și $\langle u, v \rangle \in C$, atunci $x_1 u x_2 v x_3 \in L$.

Vom nota cu $\mathcal{I}$ familia limbajelor contextuale interioare.

Exemplul 2.9. Fie gramatica $G = (\{a, b, c\}, \{\lambda\}, \{\langle x, yz \rangle, \langle xy, z \rangle \mid \{x, y, z\} = \{a, b, c\}\})$. Avem egalitatea

$$L(G) = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid N(a, x) = N(b, x) = N(c, x)\}.$$

(Reamintim că $N(a, x)$ este numărul aparițiilor simbolului a în șirul x .)

Incluziunea $\subseteq$ este evidentă. Să notăm cu E limbajul din membrul drept al egalității de demonstrat. Fie $x \in E$. Dacă $x = \lambda$, atunci $x \in L(G)$. Fie $x \neq \lambda$; există cel puțin un subcuvânt al lui x de forma yz , $y, z \in \{a, b, c\}$, cu $y \neq z$. Fie $w = \{a, b, c\} - \{y, z\}$. Simbolul w apare în x deoarece $N(w, x) = N(y, x)$. Să presupunem că w apare în stînga subșirului yz . Contextul $\langle w, yz \rangle$ se află în gramatica G , iar șirul x' obținut din x prin ștergerea subșirurilor yz și w este în E și este strict mai scurt decât x . Printr-un raționament de inducție, rezultă că $x \in L(G)$, deci $E \subseteq L(G)$ și egalitatea este demonstrată.

Definiția 2.6. O gramatică contextuală interioară selectivă este un cuadruplu $G = (V, B, C, \varphi)$ cu componentele ca într-o gramatică contextuală selectivă. Limbajul generat de G este definit ca fiind cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ pentru care

i) $B \subseteq L$,

ii) dacă $x \in L$, $x = x_1 x_2 x_3$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(x_2)$, atunci $x_1 u x_2 v x_3 \in L$.

Vom nota cu $\mathcal{I}\mathcal{S}$ familia limbajelor contextuale interioare selective. Când este pericol de confuzie, vom nota cu $L_m(G)$ limbajul generat de o gramatică contextuală (simplă sau selectivă) în sensul definițiilor 2.1 și 2.4 și cu $L_i(G)$ limbajul generat de o gramatică contextuală interioară (simplă sau selectivă). Evident, avem întotdeauna $L_m(G) \subseteq L_i(G)$, iar pentru gramatici neselective cu $V = \{a\}$ avem $L_m(G) = L_i(G)$. (Pentru gramatici selective o asemenea egalitate nu mai este, evident, adevărată.) De asemenea, este clar că $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}\mathcal{S}$ (punem $\varphi(x) = C$ pentru orice $x \in V^*$).

Indicații bibliografice. Propoziția 2.1 apare în [60] și în [64]. Toate exemplele 2.1–2.6 sînt din [42]. Un alt exemplu interesant considerat în [42] este $L = \{ab^n \mid n \geq 1\}$, limbaj cunoscut sub numele de limbajul lui Curry. (El este un model al mulțimii numerelor naturale.) Un alt limbaj al lui Curry considerat în [42] este $L = \{ab^m cab^n \mid n, m \geq 1\}$ despre care se arată că nu este contextual simplu și nici contextual generalizat. Acest limbaj este folosit de Curry pentru a descrie mulțimea propozițiilor matematice (adevărate sau nu) (vezi [13] și [42]). Lucrarea [83] se ocupă numai cu studiul limbajelor contextuale interioare selective.

PUTEREA GENERATIVĂ A GRAMATICILOR CONTEXTUALE MARCUS

3.1. Condiții necesare pentru ca un limbaj să fie contextual de diferite tipuri

Să considerăm mai întâi câteva proprietăți de tipul teoremei de descompunere $uvwxy$ de la limbajele independente de context.

Lema 3.1. Pentru orice limbaj $L \in \mathcal{S}$ există întregii p și q astfel încât pentru orice $x \in L$, $|x| > p$, există șirurile z, y, w astfel încât $y \in L$, $x = zyw$ și $0 < |zw| \leq q$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă. Considerăm numerele

$$p = \max \{|x| \mid x \in B\},$$

$$q = \max \{|uv| \mid \langle u, v \rangle \in C\}.$$

Dacă $x \in L$, $|x| > p$, atunci $x = u_n \dots u_1 t v_1 \dots v_n$ cu $n \geq 1$, $t \in B$, $\langle u_i, v_i \rangle \in C$, $u_{n-1} \dots u_1 t v_1 \dots v_{n-1} \in L$. Luăm $\langle u_n, v_n \rangle \neq \langle \lambda, \lambda \rangle$ și punem $z = u_n$, $y = u_{n-1} \dots u_1 t v_1 \dots v_{n-1}$, $w = v_n$. Toate relațiile din enunț sînt verificate.

Definiția 3.1. Fie L un limbaj oarecare, $L = \{x_1, x_2, \dots\}$, $|x_i| \leq |x_{i+1}|$, $i \geq 1$. Spunem că limbajul L are proprietatea A dacă și numai dacă următoarea mulțime este finită

$$A(L) = \{n \mid \text{există } i \text{ astfel încât } n = |x_{i+1}| - |x_i|\}.$$

Corolar. Orice limbaj contextual selectiv are proprietatea A .

Corolarul rezultă imediat din lema anterioară, ținînd seama că mulțimea $A(L)$ conține cel mult $q + 1$ elemente.

Lema 3.2. Pentru orice limbaj $L \in \mathcal{G}$ există întregii p, q astfel încît pentru orice șir $x \in L$, $|x| > p$, există z_1, y_1, z_2, y_2, z_3 astfel încît $x = z_1 y_1 z_2 y_2 z_3$, $0 < |z_1 z_2 z_3| \leq q$ și $z_1^n y_1 z_2^n y_2 z_3^n \in L$ pentru orice $n \geq 0$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată. Definim constantele

$$p = \max \{|x| \mid x \in B_1\},$$

$$q = \max \{|uvy| \mid \langle u, v \rangle \in C, y \in B_2\}.$$

Fie $x \in L(G)$, $|x| > p$. Rezultă că $x = u_n \dots u_1 z y^n v_1 \dots v_n$ cu $z \in B_1$, $y \in B_2$, $\langle u_i, v_i \rangle \in C$. Putem alege contextul $\langle u_n, v_n \rangle$ și șirul y astfel încît $|u_n v_n y| > 0$. Fie șirurile $z_1 = u_n$, $z_2 = y$, $z_3 = v_n$, $y_1 = u_{n-1} \dots u_1 z y^{n-1}$, $y_2 = v_1 \dots v_{n-1}$. Evident, $0 < |z_1 z_2 z_3| \leq q$ și pentru orice $i \geq 0$ șirul $z_1^i y_1 z_2^i y_2 z_3^i$ este în limbajul $L(G)$ (pentru $i = 0$ obținem $y_1 y_2 = u_{n-1} \dots u_1 x y^{n-1} v_1 \dots v_{n-1}$, care este în $L(G)$).

Definiția 3.2. Un limbaj oarecare L are *proprietatea P* dacă și numai dacă mulțimea următoare conține o progresie aritmetică infinită

$$lg(L) = \{|x| \mid x \in L\}.$$

Corolar. Orice limbaj contextual generalizat infinit are proprietatea P.

Observația 3.1. Proprietatea P implică proprietatea A, dar reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, fie mulțimile [66]:

$$T(2k) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2k} \leq n \leq 2^{2k+1}, n \text{ par}\},$$

$$T(2k+1) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2k+1} \leq n \leq 2^{2k+2}, n \text{ impar}\}$$

pentru orice $k \geq 0$. Considerăm limbajul

$$L = \left\{ a^n \mid n \in \bigcup_{r=0}^{\infty} T(r) \right\}.$$

Deoarece diferența între lungimile a cîrăre două cuvinte consecutive din L este 1 sau 2, rezultă că $A(L) = \{1, 2\}$, deci limbajul L are proprietatea A. Să presupunem că există o progresie aritmetică infinită $\{p + rn \mid n \geq 0\}$ în mulțimea $\bigcup_{s=0}^{\infty} T(s)$. Deoarece există i astfel încît $2^{2i+1} - 2^{2i} = 2^{2i} > 2r$, rezultă

că în $T(2i)$ intră cel puțin doi termeni ai progresiei. Deoarece $T(2i)$ conține numai numere pare, rezultă că rația r a progresiei este număr par deci și primul ei termen este par. Raționamentul se poate repeta pentru mulțimile $T(2i+1)$, de unde obținem că r este număr par iar p este impar. Contradicție. Limbajul L nu are deci proprietatea P.

Lema 3.3. Pentru orice limbaj $L \in \mathcal{CS}$ există întregii p și q astfel încît orice șir $x \in L$, $|x| > p$, se descompune sub forma $x = z_1 y_1 z_2 y_2 z_3$ cu $0 < |y_1 y_2| \leq q$ și cu $z_1 z_2 z_3 \in L$.

Lema se demonstrează în același fel cu lema 3.1, cu specificul folosirii interioare a contextelor.

Corolar. Orice limbaj contextual interior selectiv are proprietatea A.

Deoarece șirurile x_1, x_3 sînt arbitrare, punînd $x_1 = x_3 = \lambda$, din lema 3.3 se obține lema 3.1. Se poate vedea ușor că lema 3.3 este valabilă și pentru limbajele contextuale generalizate. În concluzie, lema 3.3 indică o proprietate adevărată pentru toate limbajele contextuale considerate pînă acum.

Să considerăm și cîteva leme de descompunere a limbajelor contextuale, asemănătoare teoremei 1.2, de descompunere a limbajelor liniare.

Lema 3.4. Pentru orice limbaj $L \in \mathcal{C}$, $L \subseteq V^*$, există limbajele finite $L_1, L_2, L_3 \subseteq V^*$ astfel încît:

$$i) L \subseteq L_1^* L_2 L_3^*,$$

ii) pentru orice șir $w_1 \in L_1^*$ ($w_2 \in L_3^*$) există $w_2 \in L_3^*$ (respectiv, $w_1 \in L_1^*$) astfel încît $w_1 L_2 w_2 \subseteq L$.

Demonstrație. Pentru o gramatică contextuală simplă $G = (V, B, C)$ definim

$$L_1 = \{u \mid \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$L_2 = B,$$

$$L_3 = \{v \mid \langle u, v \rangle \in C\}$$

și proprietățile i) și ii) sînt imediate.

Lema 3.5. Pentru orice limbaj $L \in \mathcal{G}$, $L \subseteq V^*$, există limbajele finite $L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq V^*$ astfel încît

$$i) L \subseteq L_1^* L_2 L_3^* L_4^*,$$

ii) pentru orice șir $w_1 \in L_1^*$ ($w_2 \in L_4^*$) există $n \geq 0$ și $w_2 \in L_4^*$ (respectiv $w_1 \in L_1^*$) astfel încît $w_1 L_2 y^n w_2 \subseteq L$ pentru orice $y \in L_3$.

Demonstrație. Pentru o gramatică $G = (V, B_1, B_2, C)$ considerăm

$$L_1 = \{u \mid \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$L_2 = B_1, L_3 = B_2,$$

$$L_4 = \{v \mid \langle u, v \rangle \in C\}$$

și obținem imediat proprietățile i) și ii).

Să considerăm acum o proprietate specifică limbajelor contextuale.

Definiția 3.3. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj oarecare și fie mulțimile

$$K_0(L) = \{x \in L \mid \text{nu există } y \in L, y \neq x, \text{ astfel încît } y \in \text{Sub}(x)\},$$

$$K_i(L) = K_{i-1}(L) \cup K_0(L - K_{i-1}(L)), \quad i = 1, 2, \dots$$

Spunem că limbajul L are *proprietatea K* dacă și numai dacă toate mulțimile $K_i(L)$, $i \geq 0$, sînt finite.

Lema 3.6. Orice limbaj contextual selectiv are proprietatea K.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă. Avem incluziunea evidentă $K_0(L(G)) \subseteq B$, prin urmare, mulțimea $K_0(L(G))$ este finită. Să considerăm acum mulțimile

$$C_i(G) = \{u_k \dots u_1 x v_1 \dots v_k \mid 0 \leq k \leq i, x \in B, \langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(x),$$

$$\langle u_j, v_j \rangle \in \varphi(u_{j-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{j-1}), j = 2, 3, \dots, k\}.$$

Evident, toate mulțimile $C_i(G)$, $i = 0, 1, \dots$ sînt finite (mulțimile B și C sînt finite). Vom demonstra că avem $K_i(L(G)) \subseteq C_i(G)$ și va rezulta că și $K_i(L(G))$ sînt mulțimi finite.

Pentru $i = 0$ incluziunea a fost verificată. O presupunem adevărată pentru $i = 0, 1, 2, \dots, j$ și vom arăta că avem și $K_{j+1}(L(G)) \subseteq C_{j+1}(G)$.

Fie $z \in K_{j+1}(L(G))$. Dacă $z \in K_j(L(G))$, atunci rezultă că $z \in C_j(G)$ și, deoarece $C_j(G) \subseteq C_{j+1}(G)$, avem $z \in C_{j+1}(G)$. Să presupunem deci că $z \notin K_j(L(G))$,

deci $z \in K_0(L(G) - K_j(L(G)))$. Rezultă că $z \in L(G) - K_j(L(G))$ și nu există nici un subcuvînt al lui z care este în $L(G) - K_j(L(G))$. Să presupunem că $z \notin C_{j+1}(G)$. Există deci $k > j + 1$ astfel încît $z = u_k \dots u_1 x v_1 \dots v_k$, $x \in B$, $\langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(x)$, $\langle u_r, v_r \rangle \in \varphi(u_{r-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{r-1})$, $r = 2, 3, \dots, k$ și nu există o asemenea scriere a lui z folosind mai puțin de $j + 2$ contexte. Toate șirurile de forma $u_s \dots u_1 x v_1 \dots v_s$, $0 \leq s \leq k$, sînt în limbajul $L(G)$. Există $k + 1 > j + 2$ asemenea șiruri și oricare două dintre ele formează perechi șir - subșir, deci șirul z are subșiruri diferite în mai mult de $j + 2$ mulțimi $K_i(L(G))$, prin urmare, are cel puțin un subșir care nu este în $K_j(L(G))$. El are deci subșiruri în $L(G) - K_j(L(G))$, ceea ce implică faptul că nu este în $K_0(L(G) - K_j(L(G)))$. Contradicție. Șirul z trebuie să fie în $C_{j+1}(G)$ și demonstrația este completă.

Observația 3.2. Proprietatea K este independentă de proprietățile A și P . Într-adevăr, orice limbaj pe vocabularul cu un singur element are proprietatea K (mulțimea $K_i(L)$ este formată din primele $i + 1$ cuvinte din limbaj), dar există asemenea limbaje care nu au nici proprietatea P , nici proprietatea A . Limbajul $\{a^n \mid n \text{ număr prim}\}$ este un asemenea limbaj. Invers, limbajul $L = \{ab^n c \mid n \geq 1\}$ este limbaj regulat, deci are proprietatea P drept consecință a lemei lui Bar-Hillel pentru limbajele regulate. Prin urmare, acest limbaj are și proprietatea A . Avem însă $K_0(L) = L$ deoarece oricare două șiruri din limbajul L sînt incomparabile în sensul relației „ x este subșir a lui y ”. Limbajul L nu are deci proprietatea K .

Limbajele contextuale generalizate nu au proprietatea K . Ele au însă o proprietate mai slabă (o vom numi proprietatea K').

Lema 3.7. Fie $L \in \mathcal{G}$, $L \subseteq V^*$ și fie $V_0 \subseteq V$ astfel încît există p cu proprietatea că $N(a, x) \leq p$ pentru orice $a \in V_0$, $x \in L$. Atunci, următoarea mulțime este finită:

$$K'_0(L) = \{x \in V^* \mid x = ax'b, a, b \in V_0, x \in \text{Sub}(L)\}.$$

Demonstrație. Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ și $V_0 \subseteq V$ ca mai sus. Dacă un context din C sau un șir din B_2 ar conține simboluri din V_0 , atunci ar exista șiruri în $L(G)$ cu oricît de multe apariții ale acestor simboluri ceea ce este imposibil. Rezultă că numai șirurile din B_1 pot conține simboluri din V_0 . În consecință, $K'_0(L(G)) \subseteq \text{Sub}(B_1)$, deci $K'_0(L(G))$ este o mulțime finită.

Observația 3.3. Reciprocele lemelor 3.2—3.7 nu sînt adevărate. Limbajul $\{a^n \mid n \text{ prim}\}$ probează afirmația pentru lema 3.6, iar $\{a^n \mid n \text{ neprim}\}$ pentru lema 3.3. (Așa cum vom vedea în teorema 3.13, orice limbaj pe vocabularul cu un singur element care este în familia $\mathcal{SS}$ este regulat. Limbajul $\{a^n \mid n \text{ neprim}\}$ nu este regulat, deci nu poate fi în $\mathcal{SS}$.) Limbajul $L = \{a^n b a^n b a^n \mid n \geq 1\}$ are proprietatea din lema 3.2, dar nu și pe cea din lema 3.5. (Dacă $L \subseteq L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*$ pentru limbajele finite L_1, L_2, L_3, L_4 , atunci rezultă că $L_1, L_3, L_4 \subseteq \{a\}^*$, deci L_2 conține șiruri cu două apariții ale lui b ; rezultă că L_2 este infinit ceea ce este imposibil.) Limbajul L nu este deci în familia $\mathcal{G}$. În sfîrșit, limbajul $L = \{a^n b a^m \mid n + m = 2^k, n, m \geq 1\}$ are proprietățile din lemele 3.4, 3.5 și 3.7, dar acest limbaj nu este contextual generalizat deoarece nu are proprietatea P .

Teorema 3.1. Reciproca lemei 3.1 este adevărată (deci condiția din lema 3.1 dă o caracterizare a limbajelor contextuale selective).

Demonstrație. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj cu proprietățile din lema 3.1. Definim gramatica $G = (V, B, C, \varphi)$ cu

$$B = \{x \in V^* \mid |x| \leq p, x \in L\},$$

$$C = \{\langle u, v \rangle \mid u, v \in V^*, |uv| \leq q\},$$

$$\varphi(x) = \{\langle u, v \rangle \mid uxv \in L\}, x \in V^*.$$

Avem egalitatea $L(G) = L$. Incluziunea $\subseteq$ rezultă imediat din definiția lui G . Invers, fie $x \in L$. Dacă $|x| \leq p$, atunci $x \in B$ deci $x \in L(G)$. Dacă $|x| > p$, atunci $x = z_1 y_1 w_1$ cu $y_1 \in L$, $0 < |z_1 w_1| \leq q$. Prin urmare, $\langle z_1, w_1 \rangle \in C$ și $\langle z_1, w_1 \rangle \in \varphi(y_1)$. Evident, $|x| > |y_1|$. Dacă $|y_1| \leq p$, atunci $y_1 \in B$ și $x \in L(G)$. Dacă $|y_1| > p$, atunci continuăm ca mai sus pînă la găsirea unei descompuneri $x = z_1 \dots z_k y_k w_k \dots w_1$ cu $y_k \in B$, $\langle z_k, w_k \rangle \in \varphi(y_k)$, $\langle z_i, w_i \rangle \in \varphi(z_{i+1} \dots \dots z_k y_k w_k \dots w_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. În concluzie, $x \in L(G)$, deci $L \subseteq L(G)$ și avem egalitatea $L = L(G)$.

Observația 3.4. Am văzut că proprietatea A nu este suficientă pentru ca un limbaj să fie contextual selectiv. Pe vocabularul cu un singur element, această proprietate se confundă cu cea din lema 3.2, deci, conform teoremei anterioare, orice limbaj $L \subseteq \{a\}^*$ care are proprietatea A (cu atît mai mult unul care are proprietatea P) este contextual selectiv.

În observația 3.1 am pus în evidență un limbaj $L \subseteq \{a\}^*$ care are proprietatea A , dar nu are și proprietatea P . Conform teoremei anterioare, rezultă că acest limbaj este contextual selectiv. Proprietatea P nu este deci necesară pentru ca un limbaj să fie contextual selectiv.

3.2. Relațiile dintre familiile de limbaje contextuale

Teorema 3.2. *Următoarele incluziuni sînt stricte: $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}\mathcal{S}$.*

Demonstrație. Faptul că avem $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}\mathcal{S}$ a fost deja remarcat în capitolul 2. Rămîne să arătăm că aceste incluziuni sînt stricte. Încercăm să facem acest lucru indicînd contraexemple cît mai simple cu putință. Să considerăm limbajul

$$L = \{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}.$$

El poate fi generat cu gramatica contextuală generalizată $G_1 = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{a, b\}, \{\langle \lambda, \lambda \rangle\})$, cu gramatica contextuală selectivă $G_2 = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\}, \varphi)$ cu funcția φ definită ca în exemplul 2.7, precum și cu gramatica contextuală interioară selectivă $G_3 = (\{a, b\}, \{\lambda, a, b\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\}, \varphi)$ cu $\varphi(x) = \{\langle \lambda, x \rangle\}$, $x \in \{a, b\}$, $\varphi(x) = \emptyset$ în alte cazuri. Avem deci $L \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{J}\mathcal{S}$.

Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă sau interioară care generează limbajul L . Deoarece L conține o infinitate de șiruri a^i și o infinitate de șiruri b^j , rezultă că C trebuie să conțină cel puțin un context $\langle a^i, a^j \rangle$, $i + j > 0$, și cel puțin un context $\langle b^i, b^j \rangle$, $i + j > 0$. Într-o derivare, aceste contexte se pot folosi unul după altul (interior sau exterior), deci gramatica G generează șiruri care conțin atît pe a cît și pe b . Asemenea șiruri nu sînt în limbajul L , deci $L \neq L(G)$ și L nu poate fi în $\mathcal{C} \cup \mathcal{I}$.

Teorema 3.3. *Familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{G}$ sînt incomparabile.*

Demonstrație. Există un limbaj regulat care este contextual selectiv, dar nu este contextual generalizat. Într-adevăr, fie limbajul

$$L = \{ab^na \mid n \geq 0\} \cup \{ab^n \mid n \geq 0\}.$$

El este evident regulat și poate fi generat cu gramatica contextuală selectivă $G = (\{a, b\}, \{a\}, \{\langle \lambda, b \rangle, \langle \lambda, a \rangle\}, \varphi)$ unde

$$\varphi(ab^k) = \{\langle \lambda, b \rangle, \langle \lambda, a \rangle\}, \quad k \geq 0,$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ pentru alte șiruri.}$$

Deoarece $K'_0(L) = \{ab^na \mid n \geq 0\}$, rezultă că limbajul L nu are proprietatea K' deci nu este contextual generalizat.

Invers, limbajul $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ este în $\mathcal{G}$ (exemplul 2.6), dar el nu are proprietatea K (avem $K_0(L) = L$), deci nu este contextual selectiv.

Observația 3.5. Limbajul $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ din demonstrația anterioară nu este independent de context. Putem găsi și un limbaj independent de context care să fie contextual generalizat, dar nu și contextual selectiv. Un asemenea limbaj este $L = \{ab^n c^n \mid n \geq 0\}$ care este generat de gramatica contextuală generalizată $G = (\{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{\langle \lambda, c \rangle\})$, dar nu are proprietatea K , deci nu este în $\mathcal{S}$. Acest limbaj este independent de context; de pildă, el poate fi generat cu gramatica $G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, S, \{S \rightarrow aA, A \rightarrow bAc, A \rightarrow bc, S \rightarrow a\})$.

Problemă deschisă (P1): Există limbaje regulate în $\mathcal{G} - \mathcal{S}$? (Credem că nu.)

Teorema 3.4. *Orice familie $\mathcal{L} \in \{\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}\}$ este incomparabilă cu orice familie $\mathcal{L}' \in \{\mathcal{I}, \mathcal{J}\mathcal{S}\}$.*

Demonstrație. Limbajul

$$L = \{a^n b a^m b a^p \mid n, m, p \geq 0\}$$

este în familia $\mathcal{I}$ deoarece poate fi generat cu gramatica $G = (\{a, b\}, \{bb\}, \{\langle \lambda, a \rangle\})$. Acest limbaj nu are proprietatea K ($K_0(L) = \{ba^m b \mid m \geq 0\}$) deci nu este în familia $\mathcal{S}$. El nu are nici proprietatea K' ($K'_0(L) = K_0(L)$), deci nu este nici în familia $\mathcal{G}$. Am obținut astfel relațiile $\mathcal{L}' - \mathcal{L} \neq \emptyset$ pentru orice familie $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ ca în enunț.

Să considerăm și gramatica contextuală simplă

$$G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}).$$

Avem egalitatea $L_m(G) = \{xh(R(x)) \mid x \in \{a, b\}^*\}$, unde $h: \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ este homomorfismul definit prin $h(a) = b, h(b) = a$. Acest limbaj nu este în familia $\mathcal{J}\mathcal{S}$. Într-adevăr, să presupunem că există o gramatică $G' = (V, B, C, \varphi)$ care generează (interior) limbajul $L_m(G)$. Evident, orice context $\langle u, v \rangle$ din C pentru care există $x \in \text{Sub}(L_i(G'))$ astfel încît $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$ conține la fel de multe apariții ale lui a și ale lui b . Fie $x \in \text{Sub}(L_i(G'))$, $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$ cu $uv \neq \lambda$ și fie șirul $w = a^k x a^k b^k h(R(x)) b^k$, $k > |uv|$. Deoarece $w \in L_m(G)$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$, rezultă că $w' = a^k u x v a^k b^k h(R(x)) b^k$ este

în $L_i(G')$, deci și în $L_m(G)$. Trebuie deci să existe un șir $y \in V^*$ astfel încît $w' = yh(R(y))$. Avem $|uxv| < k + |x|$, deci $h(R(uxv))$ trebuie să fie sufix propriu al șirului $b^k h(R(x))$, prin urmare, $h(R(uxv)) = b^i h(R(x))$ cu $i = k - |uv|$. Să scriem deci $w' = a^k u x v a^k b^i h(R(x)) b^k = a^k u x v a^k b^{k-i} h(R(uxv)) b^k$. Deoarece $w' \in L_i(G')$, rezultă că $a^k b^{k-i}$ este de forma $zh(R(z))$ ceea ce este contradictoriu. În consecință, nu putem avea egalitatea $L_m(G) = L_i(G')$, deci $L_m(G) \notin \mathcal{I}\mathcal{S}$.

Ținînd seama de incluziunile din teorema 3.2, demonstrația anterioară este completă.

3.3. Relațiile dintre familiile de limbaje contextuale și familiile din ierarhia lui Chomsky

Definiția 3.4. Un limbaj liniar L pentru care $Var(L) = 1$ se numește limbaj 1-liniar.

Teorema 3.5. Familia $\mathcal{C}$ este egală cu familia limbajelor 1-liniare.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă. Construim gramatica 1-liniară $G' = (\{S\}, V, S, P)$ unde

$$P = \{S \rightarrow uSv \mid \langle u, v \rangle \in C\} \cup \{S \rightarrow x \mid x \in B\}.$$

Egalitatea $L(G) = L(G')$ este evidentă.

Invers, fie $G = (\{S\}, V, S, P)$ o gramatică 1-liniară. Construim gramatica contextuală simplă $G' = (V, B, C)$ unde

$$B = \{x \mid x \in V, S \rightarrow x \in P\},$$

$$C = \{\langle u, v \rangle \mid u, v \in V^*, S \rightarrow uSv \in P\}.$$

Din nou, egalitatea $L(G) = L(G')$ este evidentă și teorema este demonstrată.

Corolar. Avem incluziunea strictă $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_{lin}$.

Într-adevăr, după cum se arată în [32], există limbaje regulate L cu $Var(L)$ oricît de mare. Orice limbaj L cu $Var(L) > 1$ nu este în $\mathcal{C}$.

Teorema 3.6. Familia $\mathcal{L}_3$ este incomparabilă cu oricare dintre familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$.

Demonstrație. În primul rînd, limbajul $\{a^n b a^m b a^p \mid n, m, p \geq 0\}$, considerat în demonstrația teoremei 3.4 este regulat și nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. Pe de altă parte, limbajul $\{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$ din demonstrația teoremei 3.2 este regulat și nu este în familia $\mathcal{I}$.

Invers, limbajul $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ este în $\mathcal{C}$ (exemplul 2.4), dar nu este regulat (vezi capitolul 1). În plus, în exemplul 2.9 s-a arătat că limbajul $L = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid N(a, x) = N(b, x) = N(c, x)\}$ este în familia $\mathcal{I}$. Acest limbaj nu este însă independent de context. Într-adevăr, să intersectăm acest limbaj cu limbajul regulat $R = \{a^n b^m c^p \mid n, m, p \geq 1\}$. Obținem egalitatea $L \cap R = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ și acest limbaj nu este independent de context. Deoarece familia $\mathcal{L}_2$ este închisă la intersecție cu limbaje regulate, rezultă că nici limbajul L nu este independent de context.

Problemă deschisă (P2): Care este relația dintre familiile $\mathcal{L}_3$ și $\mathcal{I}\mathcal{S}$? (Credem că avem incluziunea strictă $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{I}\mathcal{S}$.)

Teorema 3.7. Familia $\mathcal{L}_2$ este incomparabilă cu oricare dintre familiile $\mathcal{G}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IP}$.

Demonstrație. Deoarece există limbaje regulate care nu sînt în $\mathcal{G} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{I}$, pentru aceste familii este suficient să arătăm că ele depășesc familia limbajelor independente de context. Mai multe limbaje au fost considerate mai sus îndeplinind această condiție (exemplele 2.6, 2.8, 2.9). Ne-a rămas să găsim un limbaj independent de context care nu este în familia $\mathcal{IP}$. Un asemenea limbaj este $L = \{xh(R(x)) \mid x \in \{a, b\}^*\}$, $h(a) = b$, $h(b) = a$, considerat în demonstrația teoremei 3.4. Într-adevăr, acest limbaj este contextual simplu, deci, conform teoremei 3.5, este limbaj independent de context.

În relația cu familiile $\mathcal{L}_1$ și $\mathcal{L}_0$ va trebui să tratăm separat fiecare dintre familiile $\mathcal{G}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IP}$.

Teorema 3.8. Este adevărată incluziunea strictă $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}_1$.

Demonstrație. Deoarece există limbaje regulate care nu sînt în familia $\mathcal{G}$, este suficient să demonstrăm că $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}_1$.

Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată. Deoarece $L(G) = \bigcup_{\substack{x \in B_1 \\ y \in B_2}} L(G(x, y))$, unde $G(x, y)$ este gramatica $G(x, y) = (V, \{x\},$

$\{y\}, C)$, iar familia $\mathcal{L}_1$ este închisă la reuniune, rezultă că este suficient să arătăm că orice limbaj $L(G(x, y))$ este în $\mathcal{L}_1$. Să considerăm o gramatică $G(x, y) = (V, \{x\}, \{y\}, \{\langle u_i, v_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, k\})$ cu $y \neq \lambda$. Construim gramatica $G' = (V_N, V, S, P)$ cu

$$V_N = \{S, T, R\} \cup \{V_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$$

și cu mulțimea P formată din următoarele reguli:

$$1) S \rightarrow u_i S V_i, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$S \rightarrow T.$$

(Acele reguli construiesc șiruri de forma $u_{i_1} \dots u_{i_r} T V_{i_r} \dots V_{i_1}$, $r \geq 0$.)

$$2) V_i \rightarrow R v_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

(Fiecare simbol V_i introduce șirul v_i și un simbol R care va circula spre stînga cu ajutorul regulilor următoare.)

$$3) aR \rightarrow Ra, a \in V.$$

$$4) TR \rightarrow Ty.$$

(La atingerea simbolului T , simbolul R introduce șirul y și dispăre.)

$$5) T \rightarrow x.$$

(Derivarea se încheie prin introducerea șirului x .)

Evident, derivarea nu se poate termina decît după înlocuirea fiecărui simbol V_i cu v_i ; în felul acesta, din șirul $u_{i_1} \dots u_{i_r} T V_{i_r} \dots V_{i_1}$ se obține șirul $u_{i_1} \dots u_{i_r} T y^r v_{i_r} \dots v_{i_1}$, iar apoi, cu ajutorul regulii 5, se obține un șir terminal $u_{i_1} \dots u_{i_r} x y^r v_{i_r} \dots v_{i_1}$. Prin urmare, $L(G') \subseteq L(G(x, y))$.

Incluziunea inversă este imediată din modul de construire a gramaticii G' . Deoarece am presupus că $y \neq \lambda$, rezultă că gramatica G' are spațiul de lucru mărginit (în locul unui simbol V_i se introduce un șir y ; există cel mult o singură regulă care face ștergeri și anume $T \rightarrow x$ dacă $x = \lambda$.) Conform teoremei spațiului de lucru (capitolul 1), rezultă că $L(G') \in \mathcal{L}_1$.

Dacă $y = \lambda$, atunci gramatica $G(x, y)$ este echivalentă cu gramatica contextuală simplă $G(x) = (V, \{x\}, C)$, deci limbajul $L(G(x, y))$ este dependent de context și în acest caz. Toate limbajele $L(G(x, y))$ sînt deci în $\mathcal{L}_1$ și demonstrația este completă.

Teorema 3.9. *Avem incluziunea strictă $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}_1$.*

Demonstrație. Deoarece există limbaje regulate care nu sînt în familia $\mathcal{J}$ (teorema 3.6), este suficient să arătăm că are loc incluziunea $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}_1$.

Fie o gramatică $G = (V, B, C)$ cu $C = \{\langle u_i, v_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, k\}$. Construim gramatica $G' = (V_N, V, S, P)$ cu

$$V_N = \{S, T\} \cup \{V_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$$

și cu mulțimea P formată din următoarele reguli:

$$1) S \rightarrow Tx, x \in B.$$

(Se începe derivarea introducînd șirurile din B și simbolul ajutător T .)

$$2) Ta \rightarrow aT$$

$$aT \rightarrow Ta, a \in V.$$

(Simbolul T poate circula liber prin șirul curent.)

$$3) T \rightarrow u_i V_i,$$

$$V_i a \rightarrow a V_i, a \in V,$$

$$V_i \rightarrow T v_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

(Oricînd, simbolul T poate introduce un șir u_i și simbolul neterminal V_i care poate merge spre dreapta pînă se transformă în șirul v_i și reintroduce simbolul T .)

$$4) T \rightarrow \lambda.$$

(Derivarea se poate termina numai în prezența simbolului T , deci atunci cînd s-au folosit corect contextele din C .)

Se poate vedea imediat că avem egalitatea $L_i(G) = L(G')$. Deoarece singura regulă care face ștergeri este $T \rightarrow \lambda$ și aceasta se folosește o singură dată, rezultă că gramatica G' are spațiul de lucru mărginit, deci, conform teoremei 1.9, limbajul $L(G')$ este dependent de context și teorema este demonstrată.

În considerațiile de pînă acum am lucrat cu gramatici contextuale selective și interioare selective cu funcția ϕ arbitrară. Generalitatea acestei funcții dă o mare libertate gramaticilor respective.

Teorema 3.10. Orice limbaj se poate scrie ca imaginea homomorfică a intersecției dintre un limbaj contextual selectiv sau contextual interior selectiv și un limbaj regulat.

Demonstrație. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj oarecare și fie c un simbol care nu este în V . Construim următoarea gramatică contextuală selectivă: $G = (V \cup \{c\}, \{\lambda\}, C, \varphi)$ cu $C = \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\} \cup \{\langle \lambda, c \rangle\}$ și cu

$$\varphi(x) = \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\} \text{ pentru orice } x \in V^* - L,$$

$$\varphi(x) = C \text{ pentru } x \in L,$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

Avem evident egalitatea $L(G) = L\{c\} \cup V^*$. Considerăm și limbajul regulat $R = V^*\{c\}$ și homomorfismul h care lasă neschimbate simbolurile din vocabularul V și șterge simbolul c . Obținem atunci egalitatea $L = h(L(G) \cap R)$, deci teorema este adevărată pentru cazul limbajelor contextuale selective.

Să considerăm acum simbolurile c, d în afara vocabularului V și să construim următoarea gramatică contextuală interioară selectivă:

$$G' = (V \cup \{c, d\}, \{c\}, C', \varphi') \text{ unde } C' = \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\} \cup \{\langle d, d \rangle\} \text{ și}$$

$$\varphi'(c) = \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\},$$

$$\varphi'(x) = \{\langle d, d \rangle\} \text{ pentru } x \in L,$$

$$\varphi'(x) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

Evident, avem relația

$$L(G') \subseteq \{c\}V^* \cup \{c\}V^*\{d\}L\{d\} \cup M$$

unde $M \subseteq (V \cup \{c, d\})^*$ și orice șir din mulțimea M conține mai mult de două apariții ale simbolului d . Să considerăm și limbajul regulat $R = \{cd\}V^*\{d\}$ și homomorfismul h care șterge pe c și pe d și lasă neschimbate simbolurile din V . Egalitatea $L = h(L(G') \cap R)$ demonstrează teorema și pentru gramaticile contextuale interioare selective.

Corolar. Familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{SS}$ conțin limbaje nerecursiv enumerabile.

Demonstrație. Dacă limbajul L nu este recursiv enumerabil, atunci limbajele $L(G)$ și $L(G')$ din demonstrația teoremei anterioare nu sînt recursiv enumerabile. Într-adevăr, familia $\mathcal{L}_0$ este închisă la homomorfisme arbitrare și la intersecție, deci, dacă $L(G), L(G')$ ar fi în $\mathcal{L}_0$, atunci ar rezulta că $L \in \mathcal{L}_0$, ceea ce este contradictoriu.

Corolar. Oricare dintre familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{SS}$ este incomparabilă cu oricare dintre familiile $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{rec}$.

Afirmația rezultă imediat din corolarul anterior și din faptul că $\mathcal{L}_2 - (\mathcal{S} \cup \mathcal{SS}) \neq \emptyset$ (vezi teorema 3.7).

Definiția 3.5. Numim gramatică contextuală selectivă efectivă o gramatică contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ cu funcția φ efectiv calculabilă (în sensul că există un algoritm care calculează $\varphi(x)$ pentru orice $x \in V^*$).

Analog, o gramatică contextuală interioară selectivă se zice efectivă dacă funcția φ corespunzătoare este efectiv calculabilă. Notăm cu $\mathcal{S}_e, \mathcal{SS}_e$

familia limbajelor generate de gramaticile contextuale selective efective, respectiv, interioare selective efective. Deoarece toate exemplele de gramatici considerate pînă acum au fost efective, rezultă că toate afirmațiile referitoare la familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{IS}$ (cu excepția teoremei 3.10, desigur) sînt valabile și pentru familiile $\mathcal{S}_e$ și $\mathcal{IS}_e$, respectiv.

Teorema 3.11. *Au loc incluziunile stricte $\mathcal{S}_e \subset \mathcal{L}_{rec}$, $\mathcal{IS}_e \subset \mathcal{L}_{rec}$.*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă sau interioară selectivă cu funcția φ efectiv calculabilă. Următorul algoritm rezolvă problema apartenenței la limbajele $L_m(G)$, $L_i(G)$.

Fie $x \in V^*$. Construim mulțimile

$$H_0(G) = B,$$

$$H_i(G) = H_{i-1}(G) \cup \{y \in V^* \mid \text{există } z \in H_{i-1}(G) \text{ astfel încît } z \Rightarrow y\}, i = 1, 2, \dots$$

Șirul x este în limbajul $L_m(G)$ (respectiv, în limbajul $L_i(G)$) dacă și numai dacă $x \in H_{|x|}(G)$. Într-adevăr, dacă $x \in L_m(G)$ ($x \in L_i(G)$), atunci există o derivare cu cel mult $|x|$ pași a lui x , deci $x \in H_{|x|}(G)$. Implicația inversă este evidentă. (Discuția anterioară presupune implicit eliminarea prealabilă a contextului inutil $\langle \lambda, \lambda \rangle$ din C .)

Deoarece mulțimile $H_i(G)$ sînt finite și pot fi construite algoritmic (aplicația φ este efectiv calculabilă), rezultă că problema apartenenței lui x la limbajele considerate poate fi rezolvată algoritmic. Avem deci $\mathcal{S}_e \subseteq \mathcal{L}_{rec}$, $\mathcal{IS}_e \subseteq \mathcal{L}_{rec}$. Faptul că incluziunile sînt stricte rezultă din incluziunile $\mathcal{S}_e \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{IS}_e \subset \mathcal{IS}$ și din teorema 3.7.

Corolar. *Incluziunile $\mathcal{S}_e \subset \mathcal{S}$ și $\mathcal{IS}_e \subset \mathcal{IS}$ sînt stricte.*

Într-adevăr, familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{IS}$ conțin chiar și limbaje nerecursiv enumerabile, în timp ce familiile $\mathcal{S}_e$ și $\mathcal{IS}_e$ conțin numai limbaje recursive.

Teorema 3.12. *Familiile $\mathcal{S}_e$ și $\mathcal{IS}_e$ conțin limbaje nedependente de context.*

Demonstrație. Fie $L \in \mathcal{L}_{rec} - \mathcal{L}_1$ (există asemenea limbaje). Construim gramaticile G și G' ca în demonstrația teoremei 3.10. Deoarece limbajul L este recursiv, rezultă că funcțiile φ , φ' sînt calculabile algoritmic. Limbajele $L(G)$ și $L(G')$ sînt deci în $\mathcal{S}_e$, respectiv, în $\mathcal{IS}_e$. Deoarece familia $\mathcal{L}_1$ este închisă la intersecție și la homomorfisme cu ștergere cel mult liniară, rezultă că limbajele $L(G)$ și $L(G')$ nu sînt în familia $\mathcal{L}_1$. (În caz contrar, L ar fi în $\mathcal{L}_1$, ceea ce nu este adevărat.)

Să investigăm pe scurt situația limbajelor pe vocabularul cu un singur element. Se poate vedea ușor că există limbaje regulate pe acest vocabular care nu sînt în $\mathcal{C} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{I}$. (Familiile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{I}$ se confundă pe vocabularul cu un singur element.) Fie, de exemplu, limbajul regulat

$$L = \{a^2\} \cup \{a^{3^n} \mid n \geq 1\}.$$

Fie $G = (\{a\}, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată pentru limbajul L . Evident, șirul a^2 trebuie să fie în B_1 și trebuie să existe $\langle u, v \rangle \in C$ și $y \in B_2$ astfel încît $uvy = a^{3^i}$, $i > 0$. Șirul $ua^2yv = a^{3^i+2}$ va fi în limbajul $L(G)$; el nu aparține însă limbajului L , deci L nu poate fi în $\mathcal{G}$.

Pe de altă parte, orice limbaj $L \subseteq \{a\}^*$ care este în $\mathcal{C} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{I}$ este regulat. Este suficient să arătăm că $\mathcal{G} \cap \mathcal{P}(\{a\}^*) \subseteq \mathcal{L}_3$. Acest rezultat este o consecință a faptului că orice limbaj $L \in \mathcal{P.M}$, $L \subseteq \{a\}^*$ este regulat și a faptului că $\mathcal{G} \subset \mathcal{P.M}$ (teorema 3.15).

Conform observației 3.4, rezultă că orice limbaj regulat inclus în $\{a\}^*$ este în $\mathcal{I}$. (Ținem seama de faptul că pentru orice limbaj $L \in \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{P}(\{a\}^*)$ mulțimea $lg(L)$ este reuniunea unei mulțimi finite cu o mulțime finită de progresii aritmetice infinite — consecință a teoremei lui Parikh.) Evident, există limbaie contextuale selective (efective) neindependente de context (de exemplu, $\{a^n \mid n \neq 2^k, k \geq 0\}$).

Pentru familia $\mathcal{I}$ are loc însă următorul rezultat neașteptat.

Teorema 3.13. *Avem egalitatea $\mathcal{I} \cap \mathcal{P}(\{a\}^*) = \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{P}(\{a\}^*)$.*

Demonstrație. Fie $L \subseteq \{a\}^*$ un limbaj regulat. Conform cu [24], există întregii pozitivi $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_r, m_1, m_2, \dots, m_r$ astfel încât

$$L = \{a^{i_1}, \dots, a^{i_k}\} \cup \left(\bigcup_{t=1}^r \{a^{j_t + nm_t} \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \right).$$

Să notăm $p = \max\{i_1, i_2, \dots, i_k\} + 1$, $p' = \max\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$, $m = \prod_{t=1}^r m_t$ și să definim gramatica contextuală interioară selectivă $G = (\{a\}, B, C, \varphi)$ cu

$$B = L \cap \{a^n \mid n \leq p + p' + m\},$$

$$C = \{\langle \lambda, a^m \rangle\},$$

$$\varphi(a^p) = \{\langle \lambda, a^m \rangle\},$$

$$\varphi(a^i) = \emptyset \text{ pentru } i \neq p.$$

Incluziunea $L \subseteq L_i(G)$ este evidentă. Invers, fie $x = a^n$ în $L(G)$. Dacă $n \leq p + m$, atunci $x \in B$. Dacă $n > p + m$, atunci scriem $n = um + s$, $u \geq 1$, $0 \leq s \leq p + m$. Evident, $a^s \in B$, deci $a^s \in L$. Să presupunem că $s = j_t + vm_t$, $t \in \{1, 2, \dots, r\}$. Atunci $n = um + s = u \prod_{q=1}^r m_q + j_t + vm_t = j_t + m_t(v + u(m/m_t))$. Rezultă că $a^n \in L$, deci $L_i(G) = L$ și $\mathcal{L}_3 \cap \mathcal{P}(\{a\}^*) \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(\{a\}^*)$.

Invers, fie $G = (\{a\}, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală interioară selectivă și fie $L_1, L_2, \dots, L_p$ o partiție a mulțimii $\{a\}^*$ astfel încât $\varphi(x) = \varphi(y)$ pentru orice $x, y \in L_i$, dar $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ pentru $x \in L_i, y \in L_j, i \neq j$. Dacă $x, y \in L_i$ (deci dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$) și $|x| < |y|$, atunci putem pune $\varphi(y) = \emptyset$ deoarece pentru orice context $\langle u, v \rangle \in \varphi(L_i)$ putem deriva de la șirul y folosind subșirul său x . Prin urmare, din fiecare limbaj L_i putem păstra numai șirul cel mai scurt și putem pune $\varphi(x) = \emptyset$ pentru orice alt șir x din L_i .

Să considerăm deci o gramatică contextuală interioară selectivă $G' = (\{a\}, B, C, \varphi')$ echivalentă cu G și avînd $\varphi'(x) \neq \emptyset$ numai pentru o mulțime finită de șiruri din $\{a\}^*$. Definim

$$p = \max\{|x| \mid \varphi'(x) \neq \emptyset\},$$

$$q = \max\{|uv| \mid \langle u, v \rangle \in \varphi'(x), x \in \{a\}^*\},$$

$$M = L(G') \cap \{a^n | n \leq p\},$$

$$N = L(G') \cap \{a^n | p < n \leq p + q\}.$$

Considerăm următoarea gramatică drept-liniară: $G'' = (\{S, T\}, \{a\}, S, P)$ unde mulțimea P este formată din următoarele reguli

$$S \rightarrow x, x \in M \cup N \cup B,$$

$$S \rightarrow xT, x \in N,$$

$$T \rightarrow uvT, \langle u, v \rangle \in \varphi'(x) \text{ pentru } x \in \{a\}^*,$$

$$T \rightarrow uv, \langle u, v \rangle \in \varphi'(x) \text{ pentru } x \in \{a\}^*.$$

Avem egalitatea $L(G'') = L(G')$. Incluziunea $\subseteq$ este evidentă. Invers, fie $x = a^n$ în $L(G')$. Dacă $n \leq p + q$ sau $a^n \in B$, atunci $x \in L(G'')$. Să presupunem că $n > p + q$ și $a^n \notin B$. Există o derivare a lui x care pleacă de la un șir $y \in B$ și folosește contextele $\langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_k, v_k \rangle$. Deoarece $|u_i v_i| \leq q$, rezultă că există j astfel încât $|yu_1 v_1 \dots u_j v_j| \in (p, p + q]$. Șirul $z = yu_1 v_1 \dots u_j v_j$ aparține mulțimii N , deci regula $S \rightarrow zT$ este în P . Regulile $T \rightarrow u_r v_r T, r = j + 1, \dots, k - 1, T \rightarrow u_k v_k$ sînt, de asemenea, în P , deci putem găsi o derivare a șirului x în gramatica G'' . În consecință, $L(G'')$ include limbajul $L(G')$ și demonstrația este completă.

Observația 3.6. În teoria gramaticilor Chomsky eliminarea λ -regulilor este o preocupare importantă și există rezultate interesante în acest sens. (De exemplu, adăugarea de λ -reguli la gramaticile independente de context nu mărește puterea generativă a acestor gramatici.) Să observăm că pentru gramaticile contextuale de orice tip, șirul λ este în limbajul generat dacă și numai dacă baza gramaticii, limbajul B , conține acest șir. De asemenea, este evident că putem elimina contextul $\langle \lambda, \lambda \rangle$ din gramaticile contextuale simple, selective, interioare și interioare selective fără a modifica limbajul generat. Există însă limbaje în familia $\mathcal{G}$ care nu pot fi generate fără a folosi contextul $\langle \lambda, \lambda \rangle$. Un asemenea limbaj este $\{a^n | n \geq 0\} \cup \{b^n | n \geq 1\}$. Pe de altă parte, contextele de forma $\langle x, \lambda \rangle$ sau $\langle \lambda, x \rangle$ nu pot fi eliminate nici din gramaticile contextuale simple sau selective. De exemplu, limbajul $L = \{ab^n | n \geq 0\}$ este în $\mathcal{S}$, dar nu poate fi generat dacă nu se folosește un context de forma $\langle \lambda, b^i \rangle$.

3.4. Relații între familiile de limbaje contextuale și familiile de limbaje matriciale

Ținînd seama de rezultatele din secțiunile anterioare, rezultă că familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{SS}$ conțin limbaje în afara familiilor $\mathcal{M}, \mathcal{M}_f, \mathcal{SM}, \mathcal{SMR}, \mathcal{M}$ și $\mathcal{M}^\lambda$. Pe de altă parte, $\mathcal{M}_f \cup \mathcal{SMR}$ include familia limbajelor regulate, deci toate familiile de limbaje matriciale enumerate mai sus conțin limbaje în afara familiilor $\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{G}, \mathcal{I}$. În plus, $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{SM}$, deci $\mathcal{C} \subset \mathcal{SM}$. Evident, $\mathcal{L}_{lin} \subset \mathcal{M}_f$, deci avem și $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_f$. Prin urmare, singurele probleme de lămurit privesc relațiile între familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{I}$ și $\mathcal{SMR}$, precum și cele între $\mathcal{G}, \mathcal{I}$ și $\mathcal{SM}, \mathcal{M}_f, \mathcal{M}$ și $\mathcal{M}^\lambda$.

Teorema 3.14. Familiile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{G}$ sînt incomparabile cu $\mathcal{SMR}$.

Demonstrație. Familia $\mathcal{SMR}$ conține toate limbajele regulate, deci $\mathcal{SMR} - \mathcal{G} = \emptyset$. Pe de altă parte, limbajul $L = \{xR(x) \mid x \in \{a, b\}^*\}$ este contextual simplu deoarece poate fi generat cu gramatica $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\})$. Acest limbaj nu este însă în familia $\mathcal{SMR}$ [62].

Teorema 3.15. Avem incluziunile stricte $\mathcal{G} \subset \mathcal{SM}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_f$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată. Deoarece familiile $\mathcal{M}_f$ și $\mathcal{SM}$ sînt închise la reuniune ([29], [78]), rezultă că, la fel ca în demonstrația teoremei 3.8, putem să ne reducem la a demonstra că $L(G(x, y)) \in \mathcal{SM} \cap \mathcal{M}_f$, pentru $x \in B_1$, $y \in B_2$.

Construim gramatica simplu matricială $G_1 = (\{A\}, \{B\}, V, S, M)$ cu

$$M = \{(S \rightarrow AB), (A \rightarrow x, B \rightarrow \lambda)\} \cup$$

$$\cup \{(A \rightarrow uA, B \rightarrow yBv) \mid \langle u, v \rangle \in C\}.$$

Se vede imediat că $L(G_1) = L(G(x, y))$ deci $L(G(x, y)) \in \mathcal{SM}$.

Gramatica matricială $G_2 = (\{S, A, B\}, V, S, M)$ cu aceleași matrici ca mai sus generează și ea limbajul $L(G(x, y))$ și are, evident, indexul 2. Prin urmare, $L(G(x, y)) \in \mathcal{M}_f$ și teorema este demonstrată. (Incluziunile din enunț sînt stricte deoarece familia $\mathcal{L}_3$ este inclusă strict în $\mathcal{SM} \cap \mathcal{M}_f$ și am văzut că există limbaje regulate care nu sînt în familia $\mathcal{G}$.)

Conform teoremei 3.14, rezultă că în enunțul teoremei 3.15 nu putem pune $\mathcal{SMR}$ în loc de $\mathcal{SM}$.

Relațiile dintre familiile $\mathcal{SM}$, $\mathcal{M}_f$ și $\mathcal{J}$ rămîn probleme deschise (problema P3). Evident, $\mathcal{SM} - \mathcal{J} \neq \emptyset$ și $\mathcal{M}_f - \mathcal{J} \neq \emptyset$ deoarece $\mathcal{L}_3 - \mathcal{J} \neq \emptyset$ (teorema 3.6). Credem că există și limbaje contextuale interioare care nu sînt în $\mathcal{SM} \cup \mathcal{M}_f$. Deoarece orice generator (un limbaj $L \in \mathcal{L}_2$ cu proprietatea că cel mai mic FAL care îl conține pe L coincide cu $\mathcal{L}_2$) al FAL -ului $\mathcal{L}_2$ nu este în $\mathcal{M}_f$ [80], un asemenea generator care ar fi în familia $\mathcal{J}$ ar rezolva problema pentru perechea $\mathcal{J}$, $\mathcal{M}_f$; limbajul D_1 este în familia $\mathcal{J}$, dar el nu este generator pentru $\mathcal{L}_2$. Limbajul D_2 este generator, dar despre el nu se știe dacă este în $\mathcal{J}$.¹⁾

Problemă deschisă (P4): Nu au fost încă studiate relațiile dintre familiile de limbaje contextuale și diversele familii de limbaje Lindenmayer ([28], [39] etc.). Unele relații pot fi clarificate ușor pe baza rezultatelor din acest capitol, dar altele cer investigații suplimentare.

3.5. Gramatici 3-contextuale

Gramaticile 3-contextuale încearcă generalizarea simultană a gramaticilor contextuale interioare și a celor exterioare.

Definiția 3.6. O gramatică 3-contextuală este un sistem $G = (V, B, C, \varphi)$ unde V, B, C sînt ca mai sus, iar $\varphi: V^* \times V^* \times V^* \rightarrow \mathcal{P}(C)$. Limbajul generat de gramatica G se definește ca fiind cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ pentru care

i) $B \subseteq L$,

ii) dacă $x \in L$, $x = x_1x_2x_3$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(x_1, x_2, x_3)$, atunci $x_1ux_2vx_3 \in L$.

¹⁾ Între timp s-a demonstrat că $D_2 \in \mathcal{J}$.

Vom nota cu $\mathcal{T}$ familia limbajelor 3-contextuale și cu $\mathcal{T}_c$ familia limbajelor 3-contextuale generate de gramatici cu aplicația φ efectiv calculabilă (gramatici 3-contextuale efective).

Teorema 3.16. *Avem incluziunile stricte $\mathcal{G} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{I}\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}_c \cup \mathcal{I}\mathcal{S}_c \subset \mathcal{T}_c$.*

Demonstrație. Incluziunile rezultă folosind lema 3.3, deoarece orice limbaj care are proprietățile din enunțul acestei leme este în familia $\mathcal{T}$. Într-adevăr, pentru un limbaj cu aceste proprietăți, fie

$$B = \{x \in L \mid |x| \leq p\},$$

$$C = \{\langle u, v \rangle \mid u, v \in V^*, |uv| \leq q\}.$$

Construim gramatica 3-contextuală $G = (V, B, C, \varphi)$ unde

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \{\langle u, v \rangle \mid x_1 u x_2 v x_3 \in L\}, \quad x_1, x_2, x_3 \in V^*.$$

Egalitatea $L(G) = L$ este evidentă, deci $\mathcal{G} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{I}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Deoarece limbajele din $\mathcal{S}_c \cup \mathcal{I}\mathcal{S}_c$ sînt recursive, rezultă că funcția φ construită mai înainte este efectiv calculabilă pentru asemenea limbaje, deci avem și $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}_c \cup \mathcal{I}\mathcal{S}_c \subseteq \mathcal{T}_c$.

Ambele incluziuni sînt stricte. Pentru a vedea aceasta este suficient să găsim un limbaj din $\mathcal{T}_c$ care nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{I}\mathcal{S}$. Un asemenea limbaj este

$$L = \{ab^n c \mid n \geq 1\} \cup \{d^n \mid n \neq 2^k, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Evident, acest limbaj are proprietatea din lema 3.3, deci este în familia $\mathcal{T}$. Se poate vedea ușor că el este chiar în $\mathcal{T}_c$. Deoarece $K_0(L) = \{ab^n c \mid n \geq 1\} \cup \{d^3\}$ și $K'_0(L) = \{ab^n c \mid n \geq 1\}$, rezultă că $L \notin \mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. Acest limbaj nu este nici în $\mathcal{I}\mathcal{S}$. Acest lucru se poate arăta repetînd raționamentul din demonstrația teoremei 3.13 pentru limbajul $\{d^n \mid n \neq 2^k, k = 0, 1, 2, \dots\}$; pe această cale, dacă L ar fi în $\mathcal{I}\mathcal{S}$, atunci ar rezulta că $\{d^n \mid n \neq 2^k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ este limbaj regulat, ceea ce nu este adevărat.

Corolar. *Lema 3.3 dă o caracterizare a limbajelor 3-contextuale.*

Necesitatea condiției din lema se poate demonstra imediat, iar suficiența este probată în demonstrația teoremei anterioare.

Gramaticile contextuale din secțiunile anterioare pot fi simulate prin forme particulare ale gramaticilor 3-contextuale care lucrează într-un mod asemănător. De pildă, familia $\mathcal{S}$ este egală cu familia limbajelor generate de gramaticile 3-contextuale $G = (V, B, C, \varphi)$ cu $|\varphi| \subseteq \{\lambda\} \times V^* \times \{\lambda\}$, unde, pentru o funcție oarecare $f: A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ notăm $|f| = \{x \in A \mid f(x) \neq \emptyset\}$. În consecință, familia $\mathcal{G}$ este egală cu familia limbajelor generate de gramaticile 3-contextuale $G = (V, B, C, \varphi)$ cu $|\varphi| \subseteq \{\lambda\} \times V^* \times \{\lambda\}$ și cu $\varphi(\lambda, x, \lambda) = C$ pentru orice $x \in V^*$.

Familia $\mathcal{I}\mathcal{S}$ este egală cu familia limbajelor generate de gramaticile 3-contextuale $G = (V, B, C, \varphi)$ pentru care funcția φ este (1,3)-constantă în sensul că $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x'_1, x_2, x'_3)$ pentru orice $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_3 \in V^*$. De asemenea, familia $\mathcal{S}$ este egală cu familia limbajelor generate de gramaticile 3-contextuale $G = (V, B, C, \varphi)$ pentru care $\varphi(x_1, x_2, x_3) = C$ pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in V^*$. (Evident, o asemenea funcție este (1,3)-constantă.)

Pentru gramaticile contextuale generalizate o asemenea particularizare cere precizări mai detaliate.

Definiția 3.7. O gramatică 3-contextuală $G = (V, B, C, \varphi)$ se zice de tip g dacă și numai dacă există mulțimea finită $D \subseteq V^*$, mulțimea finită de contexte $C_0 \subseteq V^* \times V^*$ astfel încât $C = \{\langle u, yv \rangle \mid y \in D, \langle u, v \rangle \in C_0\}$ și avem $|\varphi| = \{(u_1 \dots u_m, xy^m, v_m \dots v_1) \mid x \in B, y \in D, \langle u_i, v_i \rangle \in C_0\}$, $\varphi(u_1 \dots u_m, xy^m, v_m \dots v_1) = \{\langle u, yv \rangle \mid y \in D, \langle u, v \rangle \in C_0\}$ și $\varphi(x, y, z) = \emptyset$ în alte cazuri.

Teorema 3.17. Familia $\mathcal{G}$ este egală cu familia limbajelor generate de gramaticile 3-contextuale de tip g .

Demonstrație. Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată. Construim gramatica 3-contextuală de tip g $G' = (V, B_1, C', \varphi)$ cu componentele C' și φ identificate de mulțimile $D = B_2$, $C_0 = C$, conform definiției 3.7. Avem egalitatea $L(G) = L(G')$. Incluziunea $L(G) \subseteq L(G')$ rezultă direct din definiția lui G' . Invers, fie $z \in L(G')$ și fie $\langle u, v \rangle$ ultimul context folosit într-o derivare a lui z în raport cu G' . Rezultă că există $\langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle$ în C' și $x \in B_1$, $y \in B_2$, astfel încât $v = yv'$, $\langle u, v' \rangle \in C'$, $\langle u, v \rangle \in \varphi(u_1 \dots u_n, xy^n, v_n \dots v_1)$ și $z = u_1 \dots u_n xy^{n+1} v' v_n \dots v_1$. Am obținut o derivare a lui z în raport cu gramatica G , deci $L(G') \subseteq L(G)$.

Fie și $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică 3-contextuală de tip g și fie D, C_0 mulțimile din definiția 3.7 care identifică pe C și pe φ . Construim gramatica contextuală generalizată $G' = (V, B, D, C_0)$. Avem egalitatea $L(G) = L(G')$ și teorema este demonstrată.

Conform teoremei 3.16, puterea generativă a gramaticilor 3-contextuale este foarte mare. Următoarea teoremă precizează mai mult această afirmație.

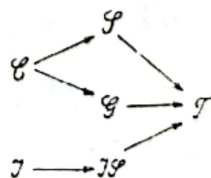
Teorema 3.18. a) Familia $\mathcal{L}_2$ este strict inclusă în familia $\mathcal{T}$. b) Familiile $\mathcal{SM}$, $\mathcal{SMR}$, $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}_1$ sînt incomparabile cu $\mathcal{T}$ și cu $\mathcal{T}_c$. c) Familia $\mathcal{T}$ este incomparabilă cu familia $\mathcal{L}_{rec}$, dar $\mathcal{T}_c$ este strict inclusă în $\mathcal{L}_{rec}$; familia $\mathcal{T}$ este incomparabilă cu $\mathcal{L}_0$.

Demonstrație. Din lema lui Bar-Hillel, rezultă că limbajele independente de context au proprietatea din lema 3.3, deci sînt în familia $\mathcal{T}$. Se poate vedea că avem chiar $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{T}_c$.

Limbajul $L = \{a^n b^n c^n d^n e^n \mid n \geq 1\}$ este în $\mathcal{M}_f \cap \mathcal{SMR}$ (deci este și în $\mathcal{SM}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}_1$). Acest limbaj nu este însă în familia $\mathcal{T}$ deoarece nu are proprietatea din lema 3.3 (vezi corolarul teoremei 3.16). Deoarece $\mathcal{L}_c$ conține limbaje nedependente de context și familiile $\mathcal{SM}$ și $\mathcal{M}$ sînt incluse în $\mathcal{L}_1$, rezultă afirmația b) a teoremei. Deoarece $\mathcal{T}$ conține limbaje nerecursiv enumerabile ($\mathcal{T}$ include pe $\mathcal{S}$), dar $\mathcal{L}_1 - \mathcal{T} \neq \emptyset$, rezultă că familia $\mathcal{T}$ este incomparabilă cu $\mathcal{L}_{rec}$ și $\mathcal{L}_0$. Incluziunea $\mathcal{T}_c \subseteq \mathcal{L}_{rec}$ se poate demonstra ca în demonstrația teoremei 3.11, deci și punctul c) este adevărat.

Observația 3.7. În introducerea gramaticilor contextuale de diferite tipuri am ales calea „istorică”, plecînd de la gramaticile contextuale simple și ajungînd la gramaticile 3-contextuale. O cale naturală ar fi fost să procedăm ca la gramaticile Chomsky, adică să începem cu clasa cea mai generală, apoi, prin particularizări, să introducem celelalte clase.

Conform rezultatelor acestui capitol, nu se poate vorbi de „o ierarhie” a familiilor de limbaje contextuale; se obțin în realitate trei ierarhii concurente în care apar familii de limbaje incomparabile:



Indicații bibliografice. În lucrarea [42] se definesc gramaticile contextuale simple, generalizate și selective și se studiază familia $\mathcal{C}$ arătându-se că ea este incomparabilă cu $\mathcal{L}_3$ (pe baza limbajului lui Curry), dar este inclusă în familia limbajelor 1-liniare. Se arată, de asemenea, că există limbaje regulate contextuale simple care nu sînt limbaje „de vecinătăți” în sensul din [6]. (O gramatică de vecinătăți este un sistem $G = (V, \theta, \tau)$ unde V este un vocabular, θ este un simbol special iar τ este o mulțime de triplete (u, v, y) , $u, v, y \in (V \cup \{\theta\})^*$). Limbajul $L(G)$ este format din toate șirurile $y \in V^*$ astfel încît în șirul $x = \theta y \theta = a_1 a_2 \dots a_s$ pentru orice i există u_i, v_i, z_i, w_i astfel încît $(u_i, v_i, a_i) \in \tau$ și $x = z_i u_i a_i v_i w_i$. În [42] se arată că limbajul regulat $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 1\}$ este contextual simplu, dar nu poate fi generat de o gramatică de vecinătăți.) Limbajele contextuale interioare (selective) au fost introduse și studiate în [83]. Familia $\mathcal{S}$ este studiată pentru prima dată aici. Unele dintre condițiile necesare din secțiunea 3.1 pot fi găsite în [64], [69], [76], iar puterea generativă a gramaticilor contextuale simple, generalizate și selective este studiată în [64]. Teoremele 3.10 și 3.12 (pentru $\mathcal{S}_c$) sînt din [30]. Gramaticile 3-contextuale au fost introduse în [49], iar în [50] a fost introdusă noțiunea de gramatică n -contextuală studiată apoi într-o serie lungă de lucrări (a se vedea capitolul 9). Rezultatul din teorema 3.8 apare în [34], [64] cu demonstrații similare celei de aici și în [59] cu o demonstrație mai complicată.

PROPRIETĂȚI DE ÎNCHIDERE LA OPERAȚII CU LIMBAJE

În general, familiile de limbaje contextuale au proprietăți destul de sărace în ceea ce privește închiderea la operații cu limbaje. Toate rezultatele din acest capitol sînt sintetizate în tabelul 4.1.

Teorema 4.1. *Familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ și $\mathcal{IS}$ nu sînt închise la reuniune. Familia $\mathcal{S}$ este închisă la reuniune.*

Demonstrație. Fie G_1, G_2 două gramatici contextuale simple (exterioare sau interioare) cu vocabularele V_1, V_2 disjuncte și cu limbajele $L(G_1), L(G_2)$ infinite. Limbajul $L(G_1) \cup L(G_2)$ nu este contextual simplu (exterior sau interior) deoarece orice gramatică a sa trebuie să conțină atît contexte peste V_1 cît și peste V_2 . Asemenea contexte pot fi folosite unul după altul și astfel se obțin șiruri care nu sînt în $L(G_1) \cup L(G_2)$. Două asemenea limbaje sînt $L_1 = \{a^n | n \geq 1\}$, $L_2 = \{b^n | n \geq 1\}$. Un raționament asemănător este valabil și pentru gramaticile contextuale generalizate cu condiția ca limbajele generate de gramaticile G_1 și G_2 să nu poată fi generate cu gramatici care nu conțin contexte diferite de $\langle \lambda, \lambda \rangle$. Asemenea limbaje sînt $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 1\}$, $L_2 = \{c^n d^n | n \geq 0\}$.

Pentru familia $\mathcal{IS}$ considerăm limbajele

$$L_1 = \{b^n a b^n | n \geq 1\} \quad L_2 = \{a b^n | n \geq 1\}.$$

Evident, ambele aparțin familiei $\mathcal{IS}$, dar $L_1 \cup L_2$ nu este în această familie. Într-adevăr, dacă $G = (V, B, C, \varphi)$ ar fi o gramatică contextuală interioară selectivă pentru limbajul $L_1 \cup L_2$, atunci mulțimea C ar trebui să conțină cel puțin un context de forma $\langle b^i, b^j \rangle$ cu $i + j > 0$ astfel încît sau $\langle b^i, b^j \rangle \in \varphi(ab^k)$ și $i = 0$, sau $\langle b^i, b^j \rangle \in \varphi(b^k)$, $k \geq 0$ (asemenea contexte sînt necesare pentru a genera șirurile ab^i din L_2). De la un șir $b^n a b^n$ cu $n \geq k$ putem atunci genera șirul $b^n a b^{n+j}$ sau $b^n a b^{n+i+j}$. Aceste șiruri nu sînt în $L_1 \cup L_2$, deci familia $\mathcal{IS}$ nu este închisă la reuniune.

Fie acum $G_i = (V_i, B_i, C_i, \varphi_i)$, $i = 1, 2$, două gramatici contextuale selective. Construim gramatica $G = (V_1 \cup V_2, B_1 \cup B_2, C_1 \cup C_2, \varphi)$ unde

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \text{ pentru } x \in L(G_1) - L(G_2),$$

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) \text{ pentru } x \in L(G_2) - L(G_1),$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cup \varphi_2(x) \text{ pentru } x \in L(G_1) \cap L(G_2),$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ dacă } x \notin L(G_1) \cup L(G_2).$$

Se vede ușor că $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$ deci familia $\mathcal{S}$ este închisă la reuniune.

Corolar. Familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$ nu sînt închise la substituție.

Demonstrație. Fie limbajul contextual simplu și contextual interior $L = \{a, b\}$ și fie limbajele L_1, L_2 în $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$, sau în $\mathcal{IS}$. Considerăm substituția definită prin $s(a) = L_1$, $s(b) = L_2$. Deoarece $s(L) = L_1 \cup L_2$, rezultă că închiderea la substituție implică închiderea la reuniune. Familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$ nu sînt deci închise la substituții oarecare.

Teorema 4.2. Familia $\mathcal{S}$ este închisă la substituții finite, dar nu este închisă la substituții oarecare.

Demonstrație. Fie limbajul $L = \{aba\}$. Evident, $L \in \mathcal{S}$. Fie și substituția definită prin $s(a) = \{a\}$, $s(b) = \{b^n \mid n \geq 1\}$. Limbajele $s(a)$ și $s(b)$ sînt în familia $\mathcal{S}$, dar $s(L)$ nu este în $\mathcal{S}$ deoarece $K_0(s(L)) = s(L)$.

Fie gramatica contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ și fie $s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(U^*)$ o substituție finită. Construim gramatica contextuală selectivă $s(G) = (U, s(B), s(C), \varphi')$ unde

$$s(C) = \{\langle u', v' \rangle \mid u' \in s(u), v' \in s(v), \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$\varphi'(z) = s(\varphi(x)) \text{ pentru orice } z \in s(x), x \in V^*,$$

$$\varphi'(z) = \emptyset \text{ pentru } z \notin s(V^*).$$

Tabelul 4.1.

Operația \ Familia	$\mathcal{C}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{IS}$	$\mathcal{S}$
Reuniune	NU	NU	DA	NU	NU	DA
Intersecție	NU	NU	NU	NU	NU	NU
Complementară	NU	NU	NU	NU	NU	NU
Concatenare	NU	NU	NU	NU	NU	DA
Închidere Kleene	NU	NU	NU	NU	NU	DA
Răsturnare	DA	NU	DA	DA	DA	DA
Homomorfisme λ -libere	DA	DA	DA	DA	NU	DA
Homomorfisme arbitrare	DA	DA	DA	DA	NU	DA
Substituții finite	DA	NU	DA	DA	NU	DA
Substituții arbitrare	NU	NU	NU	NU	NU	DA
Intersecție cu limbaje regulate	NU	NU	NU	NU	NU	NU
Homomorfisme inverse	NU	NU	NU	NU	NU	NU
Aplicații gsm	NU	NU	NU	NU	NU	NU
$Shuf, SShuf$ $Shuf^*, SShuf^*$	NU	NU	NU	?	?	?
D, C, S	NU	NU	DA	NU	NU	DA
Agg	NU	NU	NU	?	?	?
Închidere circulară	NU	NU	NU	NU	NU	NU
Dublare	NU	NU	NU	NU	NU	NU

Are loc egalitatea $L(s(G)) = s(L(G))$. Într-adevăr, fie un şir $z \in s(L(G))$. Există $y \in L(G)$ astfel încît $z \in s(y)$. Presupunem că $y = u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n$ cu $x \in B$, $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(x)$, $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(u_{i-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{i-1})$ pentru $i = 2, 3, \dots, n$ şi $z = u'_n \dots u'_1 x' v'_1 \dots v'_n$ cu $u'_i \in s(u_i)$, $x' \in s(x)$, $v'_i \in s(v_i)$. Din construcţia anterioară rezultă că $x' \in s(B)$, $\langle u'_i, v'_i \rangle \in C$ pentru orice i şi $\langle u'_i, v'_i \rangle \in \varphi'(x')$, $\langle u'_i, v'_i \rangle \in \varphi'(u'_{i-1} \dots u'_1 x' v'_1 \dots v'_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots, n$. În concluzie, $z \in L(s(G))$ şi avem incluziunea $s(L(G)) \subseteq L(s(G))$.

Invers, fie $z \in L(s(G))$, $z = u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n$, $x \in s(B)$, $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi'(x)$, $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi'(u_{i-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots, n$. Fie $x' \in B$ astfel încît $x \in s(x')$ şi fie $\langle u'_i, v'_i \rangle \in C$ astfel încît $u_i \in s(u'_i)$, $v_i \in s(v'_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Din construcţia gramaticii G' rezultă că derivarea $x' \Rightarrow u'_1 x' v'_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow u'_n \dots u'_1 x' v'_1 \dots v'_n$ este corectă în raport cu gramatica G . Fie z' şirul generat prin această derivare. Deoarece $z \in s(z')$, rezultă că $L(s(G)) \subseteq s(L(G))$ şi teorema este demonstrată.

Corolar. Familia $\mathcal{S}$ este închisă la homomorfisme arbitrare.

Corolar. Familia $\mathcal{C}$ este închisă la substituţii finite, deci este închisă la homomorfisme.

Dacă în demonstraţia anterioară ignorăm rolul funcţiei φ , atunci obţinem justificarea afirmaţiei din enunţ.

Teorema 4.3. Familia $\mathcal{G}$ este închisă la homomorfisme arbitrare, dar nu şi la substituţii finite.

Demonstraţie. Fie limbajul $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. El este evident în familia $\mathcal{G}$. Fie şi substituţia finită $s: \{a, b, c\}^* \rightarrow \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}^*)$ definită prin $s(a) = \{a\}$, $s(c) = \{c\}$, $s(b) = \{b, d\}$. Atunci

$$s(L) = \{a^n w c^n \mid n \geq 0, w \in \{b, d\}^*, |w| = n\}.$$

Limbajul $s(L)$ nu este contextual generalizat. Într-adevăr, fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică pentru limbajul $s(L)$. Deoarece subcuvintele $w \in \{b, d\}^*$ care apar în şirurile din $s(L)$ pot fi, de exemplu, de forma $b^k d^i$, rezultă că trebuie să existe contexte care conţin simboluri b sau d . Fie $\langle u, v \rangle$ un asemenea context. Pe de altă parte, există contexte $\langle u', v' \rangle$ care conţin simboluri a şi c . Folosind aceste contexte în ordini arbitrare obţinem şiruri care nu sînt în $s(L)$. Gramatica G nu poate deci genera limbajul $s(L)$.

Dîndu-se o gramatică contextuală generalizată $G = (V, B_1, B_2, C)$ şi un homomorfism $h: V^* \rightarrow U^*$ putem construi gramatica

$$h(G) = (U, h(B_1), h(B_2), h(C))$$

care, evident, va genera limbajul $h(L(G))$, deci familia $\mathcal{G}$ este închisă la homomorfisme arbitrare.

Teorema 4.4. Familia $\mathcal{S}$ este închisă la substituţii finite, dar familia $\mathcal{SS}$ nu este închisă la homomorfisme λ -libere.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{G} = (V, B, C)$ o gramatică contextuală interioară şi fie $s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(U^*)$ o substituţie finită. Construim gramatica $s(G) = (U, s(B), s(C))$ ca în demonstraţia teoremei 4.2; tot ca acolo se poate arăta că $L(s(G)) = s(L(G))$ şi rezultă prima afirmaţie din enunţul teoremei.

Fie şi gramatica contextuală interioară selectivă

$$G = (\{a, b, c\}, \{babcb\}, \{\langle \lambda, b \rangle, \langle b, b \rangle\}, \varphi)$$

unde $\varphi(a) = \{\langle b, b \rangle\}$, $\varphi(c) = \{\langle \lambda, b \rangle\}$, $\varphi(x) = \emptyset$ în alte cazuri. Se vede că $L(G) = \{b^n a b^n c b^m | n, m \geq 1\}$. Fie și homomorfismul $h: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ definit prin $h(a) = a$, $h(b) = b$, $h(c) = a$. Obținem

$$h(L(G)) = \{b^n a b^n a b^m | n, m \geq 1\}.$$

Să presupunem că există o gramatică $G' = (V, B, C, \varphi)$ astfel încât $h(L(G)) = L(G')$. Deoarece primele două subșiruri de simboluri b din șirurile limbajului $h(L(G))$ au lungimi egale, rezultă că există cel puțin un context $\langle b^j, b^j \rangle$ în C ($j > 0$) astfel încât există șirul $b^i a b^k$ cu $\langle b^j, b^j \rangle \in \varphi(b^i a b^k)$, $i, k \geq 0$. Fie un șir $b^n a b^n a b^m$ cu $n > \max(i, k)$, $m > \max(i, k)$. Acest șir este în $h(L(G))$ deci, folosind contextul $\langle b^j, b^j \rangle$ pentru subșirul $b^i a b^k$ din extrema dreaptă, din șirul $b^n a b^n a b^m$ obținem șirul $b^n a b^{n+j} a b^{m+j}$ care trebuie să fie în $L(G')$. Acest șir nu este însă în limbajul $h(L(G))$, deci G' nu poate genera limbajul $h(L(G))$ și familia $\mathcal{FS}$ nu este închisă la homomorfisme λ -libere.

Corolar. Familia $\mathcal{FS}$ nu este închisă la substituții finite sau homomorfisme arbitrare. Familia $\mathcal{F}$ este închisă la homomorfisme arbitrare.

Teorema 4.5. Familia $\mathcal{F}$ este închisă la substituție.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică 3-contextuală și fie s o substituție astfel încât pentru orice simbol $a \in V$, $s(a) \in \mathcal{F}$. Fie $G_a = (V_a, B_a, C_a, \varphi_a)$ o gramatică 3-contextuală pentru limbajul $s(a)$, $a \in V$. Construim următoarea gramatică 3-contextuală: $s(G) = (U, B_s, C_s, \varphi_s)$ unde

$$U = \bigcup_{a \in V} V_a,$$

$$B_s = \beta(B), \text{ unde } \beta \text{ este substituția care duce pe } a \text{ în } B_a \\ \text{pentru fiecare } a \in V,$$

$$C_s = \beta(C) \cup \bigcup_{a \in V} C_a,$$

iar aplicația φ_s se definește în felul următor:

Pentru fiecare triplet (x_1, x_2, x_3) , $x_1, x_2, x_3 \in U^*$ punem pentru început $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \emptyset$.

Pentru $x_1, x_2, x_3 \in U^*$ astfel încât există $z = z_1 z_2 z_3$ în limbajul $L(G)$ și $x_i \in \beta(z_i)$, $i = 1, 2, 3$, adăugăm la $\varphi_s(x_1, x_2, x_3)$ mulțimea $\beta(\varphi(z_1, z_2, z_3))$.

Pentru $x_1, x_2, x_3 \in U^*$ astfel încât există $a_1, a_2, \dots, a_k$ în V , $y_i \in s(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $x_1 = y_1 \dots y_{j-1} z_1$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3 y_{j+1} \dots y_k$ și $y_j = z_1 z_2 z_3$, adăugăm la $\varphi_s(x_1, x_2, x_3)$ mulțimea $\varphi_{a_j}(z_1, z_2, z_3)$.

Orice derivare în gramatică $s(G)$ are două faze: una în care se derivează un șir din $\beta(L(G))$, simulând o derivare în gramatica G , și o fază în care fiecare subcuvînt din limbajele $s(a)$ este derivat ca în gramatica G_a . Avem egalitatea $s(L(G)) = L(s(G))$.

Fie $z \in s(L(G))$, $z \in s(x)$ pentru un șir $x \in L(G)$. Dacă $x = a_1 a_2 \dots a_n$, atunci $z = z_1 z_2 \dots z_n$, $z_i \in s(a_i)$. Fie $y_i \xrightarrow{*} z_i$ o derivare pentru șirul z_i în gramatica G_{a_i} plecînd de la un șir $y_i \in B_{a_i}$. Următoarea derivare poate fi realizată în gramatica $s(G)$:

$$y_1 y_2 \dots y_n \xrightarrow{*} z_1 y_2 y_3 \dots y_n \xrightarrow{*} z_1 z_2 y_3 \dots y_n \xrightarrow{*} z_1 z_2 \dots z_n.$$

Pe de altă parte, șirul $y_1 y_2 \dots y_n$ este și el în limbajul $L(s(G))$. Într-adevăr, fie o derivare $w \xrightarrow{*} x$ în gramatica G , $w \in B$. În gramatica $s(G)$ se poate realiza

o derivare $t \xRightarrow{*} z$ care corespunde derivării $w \xRightarrow{*} x$ și pleacă de la $t \in \beta(w)$, deci de la un șir din B_s . Rezultă că $z_1 z_2 \dots z_n$ este un șir din limbajul $L(s(G))$ și avem incluziunea $s(L(G)) \subseteq L(s(G))$.

Invers, fie un șir $z \in L(s(G))$. Putem descompune acest șir sub forma $z = z_1 z_2 \dots z_n$, $z_i \in s(a_i)$, $a_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, n$. Într-adevăr, orice șir din B_s este de această formă, iar folosirea unui context din mulțimea C_s păstrează împărțirea șirurilor în asemenea subcuvinte. Există o descompunere $z = z_1 z_2 \dots z_n$ astfel încât pentru fiecare z_i există o derivare $y_i \xRightarrow{*} z_i$ în gramatica G_{a_i} plecând de la un șir $y_i \in B_{a_i}$. Șirul $y_1 y_2 \dots y_n$ este deci în $L(s(G))$. Fie $w \in B_s$ un șir astfel încât $w \xRightarrow{*} y_1 y_2 \dots y_n$ în raport cu gramatica $s(G)$. Această derivare folosește contexte din mulțimea $\beta(C)$, deci corespunde unei derivări $x \xRightarrow{*} a_1 a_2 \dots a_n$ în gramatica G cu $x \in B$. Deoarece $z_i \in s(a_i)$, rezultă că $z \in s(a_1 a_2 \dots a_n)$, deci $z \in s(L(G))$ și obținem și incluziunea $L(s(G)) \subseteq s(L(G))$.

Corolar. Familia $\mathcal{F}$ este închisă la substituții finite, homomorfisme, reuniune, concatenare și închidere Kleene.

Demonstrație. Închiderea la substituții finite și homomorfisme rezultă imediat, iar pentru reuniune, concatenare și închidere Kleene considerăm limbajele

$$L_1 = \{a, b\} \quad L_2 = \{ab\} \quad L_3 = \{a^n \mid n \geq 0\}.$$

Fie L, L' două limbaje din familia $\mathcal{F}$. Fie și substituția dată prin $s(a) = L, s(b) = L'$. Evident,

$$s(L_1) = L \cup L' \quad s(L_2) = LL' \quad s(L_3) = L^*.$$

Deoarece limbajele L_1, L_2, L_3 sînt în familia $\mathcal{F}$, rezultă că și $L \cup L', LL'$ și L^* sînt în $\mathcal{F}$.

Teorema 4.6. Nici una dintre familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{IS}$ și $\mathcal{F}$ nu este închisă la intersecție cu limbaje regulate.

Demonstrație. Conform teoremei 3.10, orice limbaj se poate scrie ca imaginea homomorfică a intersecției unui limbaj contextual selectiv (sau interior selectiv) și un limbaj regulat. Deoarece familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{F}$ sînt închise la homomorfisme, rezultă că aceste familii nu sînt închise la intersecție cu limbaje regulate. (În caz contrar, orice limbaj ar fi în $\mathcal{F}$.) Deoarece limbajul V^* este contextual simplu, dar există limbaje regulate care nu sînt în familia $\mathcal{G}$, rezultă că familiile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{G}$ nu sînt închise la intersecție cu limbaje regulate. Cu același argument rezultă că nici familia $\mathcal{I}$ nu este închisă la intersecție cu limbaje regulate.

Să considerăm și următoarea gramatică contextuală interioară selectivă: $G = (\{a, b, c\}, \{abcd\}, \{\langle a, cd \rangle\}, \varphi)$ unde $\varphi(a^n b c^n) = \{\langle a, cd \rangle\}$ pentru $n \geq 0$ și $\varphi(x) = \emptyset$ pentru alte șiruri. Fie și limbajul regulat

$$R = \{a^i b c^j d^k \mid i, j, k \geq 1\}.$$

Este evident că $L(G) \cap R = \{a^n b c^n d^n \mid n \geq 1\}$. Limbajul $L(G) \cap R$ nu este în familia $\mathcal{IS}$. Într-adevăr, fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală interioară selectivă care generează acest limbaj. Dacă $\langle u, v \rangle \in C$ astfel încât $uv \neq \lambda$ și există $x \in \text{Sub}(L(G) \cap R)$ cu $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$, atunci trebuie ca $\langle u, v \rangle = \langle a^i, c^j d^k \rangle$, $i > 0$. Deoarece uxv trebuie să fie subșir al unui șir din $L(G) \cap R$,

rezultă că $a^i x c^j d^k$ este de forma $a^{i+j} b c^{k+i} d^j$, $j, k \geq 0$. Fie $z = a^r b c^r d^r$ din $L(G) \cap R$ cu $r > j, r > k$. Atunci $z = a^{r-j} x c^{r-k} d^r$, deci putem deriva folosind contextul anterior și obținem șirul $a^{r-j+i} x c^i d^i c^{r-k} d^r$. Acest șir nu poate fi în $L(G) \cap R$. Contradicție, deci $L(G) \cap R \notin \mathcal{IS}$.

Corolar. Familia $\mathcal{T}$ nu este închisă la intersecție și complementară.

Din faptul că $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{T}$ și din faptul că $\mathcal{T}$ nu este închisă la intersecție cu limbaje regulate, rezultă că $\mathcal{T}$ nu este închisă la intersecție. Cu legile lui deMorgan și închiderea lui $\mathcal{T}$ la reuniune, acest fapt implică neînchiderea la complementară.

Teorema 4.7. Nici una dintre familiile de limbaje contextuale nu este închisă la aplicații gsm.

Demonstrație. Fie $A = (K, V, P, s_0, F)$ un automat finit. Considerînd acest automat ca fiind un gsm, avem, evident, egalitatea $A(L) = L \cap L(A)$, pentru orice limbaj $L \subseteq V^*$. Prin urmare, închiderea la aplicații gsm implică închiderea la intersecție cu limbaje regulate. Ca urmare a teoremei 4.6, rezultă că familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{IS}$ și $\mathcal{T}$ nu sînt închise la aplicații gsm.

Teorema 4.8. Familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{IS}$ nu sînt închise la intersecție.

Demonstrație. Fie limbajele contextuale simple

$$L_1 = \{a, b\}^+ \{a\}, L_2 = \{a\} \{a, b\}^+.$$

Evident, limbajul $L_1 \cap L_2 = \{a\} \{a, b\}^* \{a\}$ nu este în familia $\mathcal{S}$ deoarece nu are proprietatea K . Pentru familiile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{G}$ teorema este demonstrată. Acest limbaj nu este nici contextual generalizat. Într-adevăr, fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată pentru $L_1 \cap L_2$. Nici un context din C nu poate fi de forma $\langle bu, v \rangle$ sau $\langle u, vb \rangle$ deoarece nici un șir din $L_1 \cap L_2$ nu începe și nu se sfîrșește cu simbolul b . În limbajul $L_1 \cap L_2$ există însă șiruri de forma $a^n b^m a^p b^q a^r$ cu n, m, p, q, r arbitrar de mari. Generarea unor asemenea șiruri impune folosirea cel puțin a unui context $\langle u, v \rangle$ cu $u \in \{b\}^+$ sau $v \in \{b\}^+$. Contradicție, deci familia $\mathcal{G}$ nu poate fi închisă la intersecție.

Fie și limbajele

$$L_1 = \{x \in \{a, b, c, d, e\}^* \mid N(a, x) = N(b, x) = N(c, x)\},$$

$$L_2 = \{x \in \{a, b, c, d, e\}^* \mid N(c, x) = N(d, x) = N(e, x)\}.$$

Aceste limbaje sînt în familia $\mathcal{I}$. (Dacă la gramatica G din exemplul 2.9 adăugăm contextele $\langle d, \lambda \rangle, \langle e, \lambda \rangle$, atunci obținem o gramatică pentru limbajul L_1 .) Limbajul

$$L_1 \cap L_2 = \{x \in \{a, b, c, d, e\}^* \mid N(a, x) = N(b, x) = N(c, x) = N(d, x) = N(e, x)\}$$

nu este însă în familia $\mathcal{IS}$ și acest lucru este evident deoarece o gramatică contextuală interioară selectivă nu poate genera o infinitate de șiruri de forma $a^n b^n c^n d^n e^n$, de exemplu. Rezultă că familiile $\mathcal{I}$ și $\mathcal{IS}$ nu sînt închise la intersecție și teorema este demonstrată.

Teorema 4.9. Familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{IS}$ nu sînt închise la complementară.

Demonstrație. Pentru familia $\mathcal{S}$ afirmația rezultă din legile lui deMorgan, teorema 4.8 și închiderea la reuniune a acestei familii.

Fie gramatica

$G = (\{a, b\}, \{ab, ba\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle, \langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle\})$. Avem egalitățile $L_m(G) = L_i(G) = \{a, b\}^* - (\{a^n | n \geq 0\} \cup \{b^n | n \geq 1\})$. Limbajul $\{a^n | n \geq 0\} \cup \{b^n | n \geq 1\}$ nu este în $\mathcal{C} \cup \mathcal{I}$, deci familiile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{I}$ nu sînt închise la complementară.

Considerăm și gramatica contextuală simplă

$$G = (\{a, b\}, \{abb, baa, bab, aba\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle, \langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle\}).$$

Avem egalitățile

$$L(G) = \{a, b\}^* \{abb, baa, bab, aba\} \{a, b\}^*,$$

$$\mathcal{C}L(G) = \{a\}^* \cup \{b\}^* \cup \{a^n b | n \geq 1\} \cup \{b^n a | n \geq 1\}.$$

Să presupunem că există o gramatică contextuală generalizată $G' = (V, B_1, B_2, C)$ care generează limbajul $\mathcal{C}L(G)$. Mulțimea B_1 trebuie să conțină șirurile λ, ab și ba . Rezultă că mulțimea B_2 trebuie să se reducă la $\{\lambda\}$. (Orice șir nenul plasat la dreapta șirurilor ab, ba conduce la secvențe interzise.) Limbajul $\mathcal{C}L(G)$ trebuie să fie contextual simplu ceea ce este imposibil din aceleași motive pentru care limbajul $\{a^n | n \geq 0\} \cup \{b^n | n \geq 1\}$ nu poate fi în $\mathcal{C}$.

Pentru a arăta că familia $\mathcal{I}\mathcal{S}$ nu este închisă la complementară, fie limbajul $L = \{a^n b^n | n \geq 1\}$. El este, evident, în $\mathcal{I}\mathcal{S}$, dar complementara sa nu poate fi generată cu o gramatică $G = (V, B, C, \varphi)$ contextuală interioară selectivă. Într-adevăr, $a^i \in V^* - L$ pentru orice i ; rezultă că trebuie să existe un context $\langle u, v \rangle = \langle a^j, a^k \rangle$, $j + k > 0$ astfel încît $\langle u, v \rangle \in \varphi(a^r)$, $r \geq 0$. Fie șirul $a^m b^{m+j+k}$, $m > r$. Acest șir este în $V^* - L$ deoarece $m \neq m + j + k$. Rezultă că putem deriva șirul $ua^r va^{m-r} b^{m+j+k} = a^{m+j+k} b^{m+j+k}$. Acest șir nu este însă în $V^* - L$. Contradicția arată că limbajul $V^* - L$ nu poate fi în $\mathcal{I}\mathcal{S}$ și demonstrația este completă.

Observația 4.1. În [26] se arată că limbajul generat de gramatica 1-liniară cu regulile $S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow dSa, S \rightarrow dSb, S \rightarrow dS, S \rightarrow c$, are complementara neindependentă de context. Ținînd seama de teorema 3.5, acest limbaj este contextual simplu. Există deci limbaje contextuale simple ale căror complementare nu sînt limbaje independente de context.

Teorema 4.10. Nici una dintre familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{I}\mathcal{S}$ nu este închisă la concatenare și închidere Kleene.

Demonstrație. Fie limbajul $L = \{a^n b^n | n \geq 1\}$. Acest limbaj este contextual simplu, dar limbajul LL nu este contextual selectiv (nu are proprietatea K) și nici contextual generalizat (nu verifică enunțul lemei 3.5). De asemenea, nici L^* nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$, din aceleași motive. Avem deci teorema pentru familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}$.

Fie gramatica contextuală interioară $G = (\{a, b, c\}, \{a\}, \{\langle b, c \rangle\})$. Limbajul $L(G)$ conține șiruri de forma xay cu xy în limbajul lui Dyck peste vocabularul $\{b, c\}$. Limbajul $L(G)L(G)$ nu este în $\mathcal{S}$. Într-adevăr, orice șir $b^i a c^i b^j a c^j$ este în $L(G)L(G)$ deci o gramatică pentru acest limbaj trebuie să conțină cel puțin un context de forma $\langle b^j, c^j \rangle$, $j > 0$. Cu un asemenea context putem genera șiruri de forma $b^j x a y a z c^j$ pentru $x a y a z \in L(G)L(G)$. Deoarece $b^j x y z c^j$ nu se poate scrie sub forma uv cu $u, v \neq \lambda$ în limbajul lui Dyck peste $\{b, c\}$, rezultă că $L(G)L(G)$ nu poate fi în familia $\mathcal{S}$. Același argument exclude posibilitatea închiderii familiei $\mathcal{S}$ la operația $*$.

Limbajele $L_1 = \{b^n a b^n \mid n \geq 1\}$, $L_2 = \{a b^n \mid n \geq 1\}$ sînt, evident, în familia $\mathcal{SS}$, dar, așa cum am văzut în demonstrația teoremei 4.4, limbajul $L_1 L_2$ nu este în $\mathcal{SS}$.

În sfîrșit, fie limbajul $L = \{b^n a b^n a \mid n \geq 1\}$. Evident, acest limbaj este în familia $\mathcal{SS}$. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică astfel încît $L^* = L_i(G)$. Trebuie să existe cel puțin un context de forma $\langle b^i, b^i \rangle$, $i \geq 1$, astfel încît $\langle b^i, b^i \rangle \in \varphi(b^j a b^k)$, $j, k \geq 0$. Deoarece șirul $b^r a b^{r+i} a b^r a$, $r = \max(j, k)$ este în L^* , rezultă că și șirul $b^r a b^{r+i} a b^{r+i} a b^r a$ trebuie să fie în $L(G)$, ceea ce este contradictoriu deoarece acest șir nu este în L^* . Familia $\mathcal{SS}$ nu este închisă la operația $*$ și demonstrația este completă.

Teorema 4.11. *Toate familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$, $\mathcal{T}$ sînt închise la răsturnare. Familia $\mathcal{G}$ nu este închisă la această operație.*

Demonstrație. Închiderea familiilor $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$, $\mathcal{T}$ la răsturnare este imediată, pentru o gramatică G , putînd fi construită gramatica „răsturnată” $R(G)$ care generează limbajul $L(R(G))$. De exemplu, dacă $G = (V, B, C, \varphi)$ este o gramatică contextuală selectivă de orice tip, atunci $R(G) = (V, R(B), \{\langle R(v), R(u) \rangle \mid \langle u, v \rangle \in C\}, \varphi')$ cu $\varphi'(x) = R(\varphi(R(x)))$, $x \in V^*$.

Fie limbajul $L = \{a b^n c^n \mid n \geq 0\}$. El poate fi generat cu gramatica contextuală generalizată $G = (\{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{\langle \lambda, c \rangle\})$. Limbajul $R(L) = \{c^n b^n a \mid n \geq 0\}$ nu este însă în familia $\mathcal{G}$. Într-adevăr, dacă gramatica $G' = (V, B_1, B_2, C)$ generează pe $R(L)$, atunci trebuie să avem $B_1 \subseteq \{c^i b^i a \mid i \geq 0\}$, deci trebuie să existe contextele $\langle c^j, \lambda \rangle$, $\langle b^j, \lambda \rangle$ cu $j > 0$. Cu aceste contexte putem genera șiruri care nu sînt în $R(L)$, deci $R(L)$ nu este egal cu $L(G')$ și $R(L) \notin \mathcal{G}$.

Teorema 4.12. *Nici una dintre familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$, $\mathcal{T}$ nu este închisă la homomorfisme inverse.*

Demonstrație. Fie homomorfismul $h: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$ definit prin $h(a) = abc$, $h(b) = ab$, $h(c) = cb$ și fie limbajul $L = \{c\} \{bc, ba\}^*$. Evident, acest limbaj este în $\mathcal{C}$. Avem însă egalitatea $h^{-1}(L) = \{c\} \{b, c\}^* \{a\}$. Într-adevăr, fie $y = cxa$, $x \in \{b, c\}^*$. Avem $h(y) = h(c)h(x)h(a) = cbzabc$, $z \in \{ab, cb\}^*$. Orice șir din $\{b\} \{ab, cb\}^* \{abc\}$ este inclus în $\{ba, bc\}^*$ deci $h(y) \in L$ și astfel $\{c\} \{b, c\}^* \{a\} \subseteq h^{-1}(L)$. Invers, fie $y \in h^{-1}(L)$. Rezultă că $h(y) \in L$. Să observăm că y nu poate conține subcuvinte de forma aa , ab sau ac . În caz contrar, $h(y)$ ar conține subcuvinte de forma $abcbabc$, $abcbab$ și, respectiv, $abccbb$, deci subcuvinte ca sau cc , ceea ce este imposibil. Prin urmare, y conține un singur a , în extremitatea sa dreaptă. În plus, y nu poate fi format numai dintr-un singur a și nici nu poate începe cu un simbol b (șirurile din L nu încep cu simbolul a). Prin urmare, $y = cxa$, $x \in \{b, c\}^*$, deci $h^{-1}(L) \subseteq \{c\} \{b, c\}^* \{a\}$ și egalitatea este demonstrată. Deoarece $K_0(h^{-1}(L))$ este o mulțime infinită, rezultă că limbajul $h^{-1}(L)$ nu este în $\mathcal{I}$. Acest limbaj nu poate fi nici în familia $\mathcal{G}$, deoarece o gramatică $G = (V, B_1, B_2, C)$ pentru $h^{-1}(L)$ trebuie să aibă $B_1 \subseteq \{b, c\}^* \{a\}$, $B_2 = \{\lambda\}$ deci trebuie să fie echivalentă cu o gramatică contextuală simplă. Limbajul $h^{-1}(L)$ nu este însă contextual simplu. Contradicție.

Pentru familia $\mathcal{I}$ considerăm gramatica $G = (\{a, b, c, d\}, \{dd\}, \{\langle \lambda, abc \rangle\})$. Fie și homomorfismul $h: \{a, b, c, d, e\}^* \rightarrow \{a, b, c, d\}^*$ definit prin $h(a) = abc$, $h(b) = dab$, $h(c) = cab$, $h(d) = d$, $h(e) = cd$. Fie $w \in \{a, b, c, d, e\}^*$ astfel încît $h(w) \in L(G)$. Orice șir din $L(G)$ începe cu simbolul a sau cu simbolul d deci w trebuie să înceapă cu a , respectiv, cu b sau d . Dacă w începe cu a , atunci $h(w)$ începe cu abc . După acest prefix, în $h(w)$ se poate găsi simbolul a sau d . Raționamentul continuă pînă ce se ajunge la un simbol d . Prin urmare, $h(w)$ este de forma $(abc)^i d w'$, $i \geq 0$. În mod analog rezultă că w' trebuie să se termine cu $d (abc)^j$, $j \geq 0$, deci $h(w)$ este de forma $(abc)^i d x d (abc)^j$, $i, j \geq 0$.

În concluzie, $h^{-1}(L(G))$ este inclus în $\{a^i \alpha z \beta a^j \mid i, j \geq 0, \alpha, \beta \in \{b, d, e\}, z \in \{a, c\}^*\}$.

Fie $G' = (V, B, C)$ o gramatică contextuală interioară care generează limbajul $h^{-1}(L(G))$. Limbajul $L(G)$ conține șirurile $(abc)^n d(abc)^m d(abc)^r$ cu n, m, r arbitrar de mari. Rezultă că șirurile $a^n da^m da^r$ și $a^n bc^{m-1} ea^r$, cu n, m, r arbitrar de mari sînt în $h^{-1}(L(G))$. Prin urmare, mulțimea C conține cel puțin un context $\langle u, v \rangle$ în care apare cel puțin odată simbolul c . Cu acest context putem deriva de la un șir $a^n da^m da^r$ un șir de forma $xcyda^m da^r$. Asemenea șiruri nu pot fi în limbajul $h^{-1}(L(G))$. Contradicție, deci limbajul $h^{-1}(L(G))$ nu este în $\mathcal{S}$.

Fie și gramatica contextuală interioară selectivă $G = (\{a, b, c, d\}, \{bacada\}, \{\langle b, cad \rangle\}, \varphi)$ cu $\varphi(b^m ac^m) = \{\langle b, cad \rangle\}$. Avem egalitatea

$$L(G) = \left\{ b^m ac^{m_1} (ad)^{n_1} c^{m_2} (ad)^{n_2} \dots c^{m_r} (ad)^{n_r} a \mid r \geq 1, m \geq 1, m = \sum_{i=1}^r m_i = \sum_{i=1}^r n_i \right\}.$$

Fie și homomorfismul $h: \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{a, b, c, d\}^*$ definit prin $h(a) = a, h(b) = b, h(c) = c, h(d) = da$. Obținem egalitatea $h^{-1}(L(G)) = \{b^m ac^m ad^m \mid m \geq 1\}$. Într-adevăr, oricare ar fi $x \in \{a, b, c, d\}^*$, $h(x)$ nu conține subșirul dc . Rezultă că numai șirurile din $L(G)$ care nu conțin asemenea subșiruri pot avea preimagini în raport cu h (deci numai șirurile cu $r = 1, x = b^m ac^m (ad)^m a, m \geq 1$). Evident, $h^{-1}(b^m ac^m (ad)^m a) = b^m ac^m ad^m$ și egalitatea este demonstrată.

Limbajul $h^{-1}(L(G))$ nu este însă în familia $\mathcal{S}$ deoarece el nu satisface condiția din lema 3.3 (nu putem scoate un context nenul dintr-un șir din $h^{-1}(L(G))$ astfel încît să obținem un șir din același limbaj). În concluzie nici familiile $\mathcal{SS}$ și $\mathcal{S}$ nu sînt închise la homomorfisme inverse.

Vom defini acum cîteva operații cu limbaje mai puțin cunoscute, dar care sînt utile în numeroase aplicații.

Definiția 4.1. Fie V un vocabular. Pentru $x, y \in V^*$ scriem $x \sim y$ dacă și numai dacă x este o permutare a lui y . Notăm cu $\bar{x}$ clasa de echivalență a lui x în raport cu relația $\sim$. Pentru un limbaj finit $L_0 \subseteq V^*$ definim operația de *agregare în raport cu L_0* prin

$$Agg_{L_0}(x) = \{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p \mid p \geq 1, x_i \in L_0, x = x_1 x_2 \dots x_p\}.$$

Operația Agg se extinde în modul uzual la limbaje $L \subseteq L_0^*$.

Definiția 4.2. Fie $L_1, L_2 \subseteq V^*$ două limbaje oarecare. Considerăm următoarele proprietăți ale unui limbaj $L \subseteq V^*$ care include pe L_1 :

- i) dacă $x \in L, x = x_1 x_2, x_2 \neq \lambda, x_2 a \in L_2$ pentru un $a \in V$, atunci $xa \in L$,
- ii) dacă $x \in L, x = x_1 x_2, x_1 \neq \lambda, ax_1 \in L_2$ pentru un $a \in V$, atunci $ax \in L$.

Notăm cu $D(L_1, L_2)$ cel mai mic limbaj L avînd proprietatea i), cu $S(L_1, L_2)$ cel mai mic limbaj L avînd proprietatea ii) și cu $C(L_1, L_2)$ cel mai mic limbaj L avînd ambele proprietăți.

Definiția 4.3. Pentru $x, y \in V^*$ definim operațiile

$$Shuf(x, y) = \{x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k \mid x_i, y_i \in V^*, x = x_1 x_2 \dots x_k, y = y_1 y_2 \dots y_k\},$$

$SShuf(x, y) = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k, a_i, b_i \in V, x = a_1 a_2 \dots a_k, y = b_1 b_2 \dots b_k$. Pentru x, y cu $|x| \neq |y|$ punem $SShuf(x, y) = \emptyset$.

Extindem operațiile $Shuf$ și $SShuf$ la limbaje. De asemenea pentru $\alpha \in \{Shuf, SShuf\}$ definim $\alpha^1(L) = L, \alpha^{i+1}(L) = \alpha(\alpha^i(L), L), i \geq 0$, și

$$\alpha^*(L) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha^i(L), L \subseteq V^*.$$

Teorema 4.13. *Nici una dintre familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}$ nu este închisă la operația Agg .*

Demonstrație. Considerăm limbajul finit $L_0 = \{ab, baba, aba\}$ și limbajul $L \subseteq L_0^*$, $L = \{(ab)^{n+1}a(ab)^n \mid n \geq 0\}$. Acest limbaj este în familia $\mathcal{C}$, dar limbajul $Agg_{L_0}(L) = \{\bar{x}_1^n \bar{x}_3 \bar{x}_2^m \bar{x}_1^p \mid n, m, p \geq 0, n + 2m = p\}$ cu $x_1 = ab, x_2 = baba, x_3 = aba$, nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. (Demonstrația egalității anterioare poate fi găsită în [87].) Pentru simplificarea scrierii, să considerăm homomorfismul h definit prin $h(\bar{x}_1) = a, h(\bar{x}_2) = c, h(\bar{x}_3) = b$. Este suficient să arătăm că limbajul $L' = h(Agg_{L_0}(L)) = \{a^n b c^m a^p \mid n, m, p \geq 0, n + 2m = p\}$ nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. Dacă gramatica $G = (V, B, C, \varphi)$ generează limbajul L' , atunci orice șir din B conține simbolul b , deci în C trebuie să existe contexte de forma $\langle u, v \rangle$ cu $v = c^i, i > 0$. Rezultă cu $L(G)$ conține șiruri terminate cu simbolul c , ceea ce este contradictoriu.

Dacă există gramatica $G = (V, B_1, B_2, C)$ care generează limbajul L' , atunci orice șir din B_1 conține simbolul b și nu se termină cu c . Evident, C nu poate conține contexte $\langle u, v \rangle$ cu $v = c^i, i > 0$. Rezultă că există cel puțin un șir $x \in B_2$ de forma $x = c^j, j > 0$. Orice context $\langle u, v \rangle$ din C trebuie să aibă atunci $v \neq \lambda$. Există cel puțin un context $\langle u, v \rangle$ cu $u = a^k, k > 0$. Fie deci $x \in B_1, x = b, y \in B_2, y = c^r, r > 0, \langle u, v \rangle \in C, u = a^p, v = a^q, p > 0, q > 0$. Orice șir de forma $u^n x y^n v^n = a^{np} b c^{nr} a^{nq}, n \geq 1$, este deci în $L(G)$. Pentru ca aceste șiruri să fie în L' trebuie ca $np + 2nr = nq$. Obținem $n(p + 2r - q) = 0$. Pentru ca această egalitate să fie adevărată pentru orice n trebuie ca $p + 2r - q = 0$. Rezultă că $q > p$, deci B_2 conține un singur șir și acela este c^r . Orice șir din $L(G)$ conține deci apariții ale simbolului c ; șirurile $a^m b a^m, m \geq 1$ sînt însă în L' . Contradicție, deci, într-adevăr, $Agg_{L_0}(L) \notin \mathcal{G}$ și demonstrația este completă.

Teorema 4.14. *Nici una dintre familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}$ nu este închisă la vreuna dintre operațiile $Shuf, SShuf, Shuf^*, SShuf^*$.*

Demonstrație. Fie limbajele contextuale simple

$$L_1 = \{ba^n \mid n \geq 1\}, L_2 = \{a^n b \mid n \geq 1\}.$$

Au loc egalitățile

$$Shuf(L_1, L_2) = \{a^n b a^m a^p b a^q \mid n, m, p, q \geq 0, n + m \geq 1, p + q \geq 1\},$$

$$SShuf(L_1, L_2) = \{ba^{2n}b \mid n \geq 1\}.$$

Aceste limbaje nu au aici proprietatea K și nici proprietatea K' , deci nu sînt în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$.

Fie și limbajele contextuale simple

$$L_3 = \{ab, \lambda\}, L_4 = \{a^n b b \mid n \geq 0\}.$$

Deoarece avem egalitățile

$$Shuf^*(L_3) = \text{limbajul lui Dyck peste } \{a, b\},$$

$$SShuf^*(L_1) = \{a^{2^k-1} w_k \mid n \geq 0, k \geq 1\}$$

unde $w_1 = bb$, $w_2 = bbbb$, $w_i = ba^{2^{i-2}-1}ba^{2^{i-3}-1}w_{i-1}$, $i \geq 2$, iar aceste limbaje nu sînt în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$, rezultă că familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$ nu sînt închise la cele patru operații de amestecare. (Detaliile privind justificarea afirmațiilor din demonstrația anterioară pot fi găsite în [69].)

Teorema 4.15. *Familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{SS}$ nu sînt închise la operațiile D , S , C .*

Demonstrație. Fie $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{aa, ab, bb, cc, cd, dd\}$. Obținem egalitatea

$$D(L_1, L_2) = \{a^n b^m \mid n \geq 1, m \geq 0\} \cup \{a^n b^m c^r \mid n, m \geq 1, r \geq 0\} \cup \\ \cup \{a^n b^m c^r d^p \mid n, m, r \geq 1, p \geq 0\}.$$

Evident, $L_1, L_2 \in \mathcal{C}$. Totuși, $D(L_1, L_2) \notin \mathcal{G}$. Fie $G = (\{a, b, c, d\}, B_1, B_2, C)$ o gramatică pentru acest limbaj. Deoarece B_1 este finit iar B_2 poate genera numai subșiruri de forma z^i , $z \in \{a, b, c, d\}^*$, rezultă că mulțimea C conține două contexte $\langle u, v \rangle$, $\langle u', v' \rangle$ astfel încît sau uu' sau vv' conține două simboluri diferite. Aceste două contexte se pot aplica unul după altul de un număr arbitrar de ori, prin urmare, putem deriva șiruri cu un număr arbitrar de mare de subcuvinte xy , $x, y \in \{a, b, c, d\}$, $x \neq y$. Rezultă că $\mathcal{G}$ nu poate genera limbajul $D(L_1, L_2)$.

Limbajele L_1, L_2 sînt, evident, și în familia $\mathcal{S}$. Limbajul $D(L_1, L_2)$ nu este însă în $\mathcal{S}$. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală interioară pentru limbajul $D(L_1, L_2)$. Deoarece orice șir $a^i b^j$, $i \geq 1, j \geq 0$ este în $D(L_1, L_2)$, rezultă că în C apare cel puțin un context $\langle u, v \rangle$ în care apare simbolul a și cel puțin un context $\langle u', v' \rangle$ în care apare simbolul b . Pentru $x \in B$, orice șir de forma $x(uvu'v')^p$, $p \geq 0$, este în $L(G)$. Pentru p mare, aceste șiruri conțin oricît de multe subcuvinte ab , ba ceea ce nu se întîmplă pentru cuvintele din limbajul $D(L_1, L_2)$. Rezultă că $D(L_1, L_2) \neq L(G)$, deci $\mathcal{S}$ nu este închisă la operația D .

Deoarece $D(L_1, L_2) = C(L_1, L_2)$, teorema este adevărată și pentru operația C . Dacă luăm $L'_1 = \{d\}$, atunci limbajul $S(L'_1, L_2)$ va fi asemănător limbajului $D(L_1, L_2)$ și se poate arăta că $S(L_1, L_2) \notin \mathcal{G} \cup \mathcal{S}$.

Fie și limbajele $L_1 = \{ba^n ba^n b \mid n \geq 1\}$, $L_2 = \{ba, aa\}$. Evident, $L_2 \in \mathcal{SS}$ iar L_1 poate fi generat cu gramatica $G = (\{a, b\}, \{babab\}, \{\langle a, a \rangle\}, \varphi)$ cu $\varphi(aba) = \{\langle a, a \rangle\}$. Deoarece $D(L_1, L_2) = C(L_1, L_2) = \{ba^n ba^n ba^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$ și se poate vedea ușor (ca în demonstrația teoremei 4.4) că $\{ba^n ba^n ba^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$ nu este în $\mathcal{SS}$, rezultă că nici familia $\mathcal{SS}$ nu este închisă la operațiile D și C . Pentru închiderea la S luăm $L'_2 = \{aa, ab\}$ și obținem $S(L_1, L'_2) = \{a^m ba^n ba^n b \mid n \geq 1, m \geq 0\}$ și demonstrația este completă.

Teorema 4.16. *Familia $\mathcal{S}$ este închisă la operațiile D , S , C .*

Demonstrație. Fie $L_1 \in \mathcal{S}$ și $L_2 \subseteq V^*$ arbitrar. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică pentru limbajul L_1 . Construim gramatica contextuală selectivă $G' = (V, B, C \cup \{\langle \lambda, a \rangle, \langle a, \lambda \rangle \mid a \in V\}, \varphi')$ unde $\varphi'(x) = \varphi(x) \cup \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V, x = zy \text{ și } ya \in L_2\} \cup \{\langle a, \lambda \rangle \mid a \in V, x = yz \text{ și } ay \in L_2\}$. Evident, $C(L_1, L_2) \subseteq L(G')$. Invers, fie $x = u_n \dots u_1 y v_1 \dots v_n \in L(G')$. Fie j maxim cu proprietatea că $u_j \dots u_1 y v_1 \dots v_j \in L_1$ și $u_{j+1} \dots u_1 y v_1 \dots v_{j+1} \notin L_1$. Dacă $j = n$, atunci $x \in L_1$, deci $x \in C(L_1, L_2)$. Dacă $j < n$, atunci $u_k, v_k \in V \cup \{\lambda\}$ pentru orice $k > j$, deci $\langle u_k, v_k \rangle \in \varphi'(u_{k-1} \dots u_1 y v_1 \dots v_{k-1})$ pentru orice $k > j$. Dacă $u_k \neq \lambda$, atunci $v_k = \lambda$ și invers. Folosirea contextului $\langle u_k, v_k \rangle$ este

permisă numai dacă prelungirea prin u_k , respectiv, prin v_k , este posibilă. Prin urmare, $u_k \dots u_1 v_1 \dots v_k \in C(L_1, L_2)$ pentru orice k deci $x \in C(L_1, L_2)$ și obținem egalitatea $L(G) = C(L_1, L_2)$. Pentru a demonstra că familia $\mathcal{S}$ este închisă la operația D construim o gramatică G'' asemănătoare cu G' , singura diferență fiind eliminarea contextelor $\langle a, \lambda \rangle$. Pentru operația S eliminăm contextele $\langle \lambda, a \rangle$.

Observația 4.2. Nici una dintre familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ și $\mathcal{T}$ nu este nici FAL și nici $anti-FAL$. (Nici una dintre aceste familii nu este închisă la intersecție cu limbaje regulate sau la homomorfisme inverse, deci nici una nu poate fi FAL . Pe de altă parte, toate familiile de mai înainte sînt închise la homomorfisme arbitrare, deci nu pot fi $anti-FAL$.) Familia $\mathcal{IS}$ este $anti-FAL$.

Observația 4.3. Toate proprietățile de închidere sau neînchidere la operații demonstrate pentru familiile $\mathcal{S}$, $\mathcal{IS}$ și $\mathcal{T}$ sînt adevărate și pentru familiile $\mathcal{S}_c$, $\mathcal{IS}_c$ și $\mathcal{T}_c$. (Contraexemplele au fost luate întotdeauna din familiile efective, iar demonstrațiile de închidere rămîn neschimbate pentru gramaticile efective.)

Observația 4.4. Demonstrația teoremei 4.16 poate fi ușor extinsă pentru a proba închiderea familiei $\mathcal{T}$ la operațiile D , S , C . Problema închiderii familiilor $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$ și $\mathcal{T}$ la operațiile $Shuf$, $SShuf$, $Shuf^*$ și $SShuf^*$ și Agg nu a fost investigată încă (*problema P5*). Probabil că multe dintre situațiile respective conduc la rezultate de tip negativ.

Să investigăm închiderea familiilor de limbaje contextuale la alte cîteva operații mai puțin uzuale.

Definiția 4.4. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj oarecare. Numim *închidere circulară* a lui L limbajul $c(L) = \{w_1 w_2 \mid w_2 w_1 \in L, w_1, w_2 \in V^*\}$.

Teorema 4.17. Familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$, $\mathcal{T}$ nu sînt închise la operația c .

Demonstrație. Să considerăm limbajul contextual simplu $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ și să observăm că avem egalitatea

$$c(L) = \{a^p b^n a^q \mid p + q = n, p, q \geq 0, n \geq 1\} \cup \\ \cup \{b^p b^q a^n \mid p + q = n, p, q \geq 0, n \geq 1\}.$$

Există o infinitate de șiruri de forma $a^p b^n a^q$ în $c(L)$, deci, oricare ar fi o gramatică contextuală selectivă pentru $c(L)$, există șiruri de această formă care se derivează folosind contexte. Fie $\langle u, v \rangle$ ultimul context folosit în derivarea șirului $a^p b^n a^q$. Evident, trebuie să avem $uv \in \{a\}^*$. Șirul $a^p b^n a^q$ se derivează deci dintr-un șir $a^{p-i} b^n a^{q-j}$, $i, j \geq 0$, $i + j \geq 1$. Un asemenea șir nu este în limbajul $c(L)$. Limbajul $c(L)$ nu aparține familiei $\mathcal{S}$. Dacă există o gramatică contextuală generalizată $G = (V, B_1, B_2, C)$ pentru $c(L)$, atunci, deoarece șirurile anterioare cer utilizarea unui context $\langle u, v \rangle$ cu $uv \in \{a\}^*$, rezultă că $B_2 \subseteq \{b\}^*$. Pentru a genera șiruri $b^p a^n b^q$ se folosește un context $\langle u, v \rangle$ cu $uv \in \{b\}^*$, deci trebuie să avem $B_2 \subseteq \{a\}^*$. Contradicție. Limbajul $c(L)$ nu este deci în familia $\mathcal{G}$.

Pentru familiile $\mathcal{I}$, $\mathcal{IS}$, $\mathcal{T}$ considerăm gramatica contextuală interioară $G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle ab, ab \rangle\})$. Fie $G' = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică 3-contextuală pentru limbajul $c(L)$. Considerăm șirurile $a^n b^n c a^n b^n$ din $L(G)$ și $z = b^n c a^n b^n a^n \in c(L(G))$. Există o infinitate de asemenea șiruri, deci în generarea lor trebuie să se folosească efectiv contexte. Din șirul z nu putem însă scoate un context astfel încît să obținem un șir în $c(L(G))$. Într-adevăr, fie z' și $\langle u, v \rangle$ astfel încît z se obține introducînd contextul $\langle u, v \rangle$ în z' . Fie $z' = b^m c a^p b^q a^r$, $m, p, q, r \leq n$, și cel puțin unul dintre întregii m, p, q și r este

egal cu n . Să presupunem că $z' \in c(L(G))$. Orice șir din $L(G)$ începe cu simbolul a sau cu c , se termină cu b sau cu c și conține perechi de subsiruri ab . Rezultă că șirul z' se obține din unul dintre șirurile $ca^p b^q a^r b^m$, $a^p b^q a^r b^m c$, $a^r b^m c a^p b^q$. Pentru ca aceste șiruri să fie în $L(G)$ trebuie ca $p = q = r = m$. În consecință, $p = q = r = m = n$ deci $z = z'$. Contradicție. Șirul z nu poate fi în $L(G')$, deci $c(L(G)) \neq L(G')$ și $c(L(G)) \notin \mathcal{T}$ și teorema este demonstrată.

Observația 4.5. Închiderea circulară considerată mai sus poate fi generalizată în mod natural împărțind șirurile limbajului într-un număr $k \geq 2$, precizat, de subsiruri. Definim *închiderea circulară de ordin k* a unui limbaj $L \subseteq V^*$ prin $c_k(L) = \{w_k w_{k-1} \dots w_1 \mid w_1 w_2 \dots w_k \in L, w_1, \dots, w_k \in V^*\}$. Operația din definiția 4.4. este atunci identică cu c_2 . Demonstrația teoremei anterioare poate fi modificată ușor pentru a arăta că familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{SS}$, $\mathcal{T}$ nu sînt închise la operația c_k pentru nici un $k \geq 2$.

Observația 4.6. Să considerăm și operația de dublare, $d(L) = \{xx \mid x \in L\}$. Fie limbajul contextual simplu $L = \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$. Limbajul $d(L) = \{a^n c b^n a^n c b^n \mid n \geq 0\}$ nu este în familia $\mathcal{T}$. Într-adevăr, dintr-un șir $a^n c b^n a^n c b^n$ nu se poate scoate un context astfel încît șirul rămas să fie încă în limbajul $d(L)$. Deoarece limbajul L este și în familia $\mathcal{SS}$, rezultă că familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{SS}$, $\mathcal{T}$ nu sînt închise la dublare. Fie și gramatica contextuală interioară $G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle a, b \rangle\})$. Deoarece $L \subseteq L(G)$, raționamentul anterior poate fi repetat și pentru acest limbaj și rezultă că limbajul $d(L(G))$ nu este în $\mathcal{T}$, deci nici familia $\mathcal{T}$ nu este închisă la dublare.

Indicații bibliografice. Închiderea familiilor $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$ la cele mai multe dintre operațiile considerate aici este studiată în [64]. Închiderea la homomorfisme inverse este studiată în [72]. Pentru familia $\mathcal{SS}$ cîteva rezultate se găsesc în [83], iar pentru familia $\mathcal{T}$ în [49]. Operația *Agg* este definită în [68], operațiile *Shuf*, *SShuf* apar în [19], *Shuf**, *SShuf** sînt investigate în [69], *D*, *S*, *C* sînt definite în [75]. Toate aceste operații sînt mult folosite în [81]. Operația de închidere circulară a fost studiată pînă acum pentru familii de limbaje Chomsky și Lindenmayer [14]. Toate referirile la familia $\mathcal{T}$ sînt inedite.

PROBLEME DE DECIZIE

Să considerăm mai întâi câteva rezultate de decidabilitate (afirmative) referitoare la gramaticile contextuale de diferite tipuri.

Teorema 5.1. *Problema finitudinii este decidabilă pentru gramaticile contextuale simple, generalizate, interioare și interioare selective efective.*

Demonstrație. Dacă $G = (V, B, C)$ este o gramatică contextuală simplă sau interioară, atunci, evident, limbajul $L(G)$ este infinit dacă și numai dacă B este nevid și există în C cel puțin un context $\langle u, v \rangle$ cu $|uv| > 0$. Dacă $G = (V, B_1, B_2, C)$ este o gramatică contextuală generalizată, atunci limbajul $L(G)$ este infinit dacă și numai dacă B_1 este nevid și sau B_2 este nevid și C conține un context $\langle u, v \rangle$ cu $|uv| > 0$, sau B_2 conține cel puțin un șir x cu $|x| > 0$ și C este nevidă. Deoarece condițiile de mai sus sînt verificabile algoritmic, rezultă că problema finitudinii este decidabilă pentru aceste tipuri de gramatici.

Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală interioară selectivă. Limbajul $L(G)$ este infinit dacă și numai dacă există $z \in \text{Sub}(B)$ astfel încît $\varphi(z)$ conține un context $\langle u, v \rangle$ cu $|uv| > 0$. Într-adevăr, fie $x \in B$, $x = x_1 z x_2$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(z)$, $|uv| > 0$. Toate șirurile $x_1 u^n z v^n x_2$ sînt în $L(G)$, deci limbajul $L(G)$ este infinit. Invers, dacă de la nici un șir din B nu se mai poate deriva, rezultă că $L(G) = B$, deci $L(G)$ este limbaj finit. Deoarece φ este efectiv calculabilă iar $\text{Sub}(B)$ este o mulțime finită, rezultă că problema finitudinii este decidabilă algoritmic și teorema este demonstrată.

Teorema 5.2. *Problema trivialității este decidabilă pentru toate clasele de gramatici contextuale din capitolele anterioare.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm afirmația pentru gramaticile 3-contextuale, deoarece, conform rezultatelor din paragraful 3.5, celelalte gramatici se obțin prin particularizarea acestor gramatici. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică 3-contextuală. Evident, limbajul $L(G)$ este nevid dacă și numai dacă mulțimea B este nevidă. Problema trivialității este deci ușor decidabilă.

Teorema 5.3. *Problema apartenenței este decidabilă pentru gramaticile contextuale simple, generalizate, interioare, selective efective, interioare selective efective și 3-contextuale efective. Problema nu este decidabilă pentru gramaticile contextuale selective, interioare selective și 3-contextuale.*

Demonstrație. Conform rezultatelor din capitolul 3, $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{L}_{rec}$ și $\mathcal{T}_e$ include toate familiile din prima afirmație a enunțului. Toate aceste familii conțin deci limbaje recursive. Pe de altă parte, familiile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{SS}$ conțin limbaje negramatizabile Chomsky, deci nerecursive.

Teorema 5.4. *Toate rezultatele negative privind problemele de decizie referitoare la gramaticile independente de context sînt valabile și pentru gramaticile 3-contextuale efective (deci și pentru gramaticile 3-contextuale arbitrare).*

Demonstrație. Fie G o gramatică independentă de context. Lema lui Bar-Hillel furnizează algoritmic constantele p și q . Cu ajutorul acestor constante putem construi algoritmic gramatica 3-contextuală G' ca în demonstrația teoremei 3.16. Deoarece $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_{rec}$, gramatica G' este efectivă. Putem deci trece algoritmic de la G la G' . Toate problemele de decizie referitoare la gramaticile independente de context pot fi deci transferate algoritmic la gramaticile 3-contextuale efective. Problemele nedecidabile pentru gramaticile independente de context vor rămîne deci nedecidabile și pentru gramaticile 3-contextuale efective. (Lista acestor probleme este foarte lungă; a se vedea tabelul 5 de la pagina 283 [87].)

Vom prezenta în continuare o serie de rezultate de nedecidabilitate bazate pe nedecidabilitatea faptului că problema corespondenței lui Post are sau nu soluție. În [17], [87], trecerea de la problema lui Post la o problemă de limbaje se face astfel. Fie x, y două n -upluri de cuvinte nenule peste vocabularul $\{a, b\}$. Construim limbajele

$$L(x) = \{ba^{i_1} \dots ba^{i_k} cx_{i_1} \dots x_{i_k} \mid k \geq 1, i_j \leq n\},$$

$$L(x, y) = L(x)\{c\}R(L(y)),$$

$$L_s = \{w_1 cw_2 cR(w_2) cR(w_1) \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}.$$

În [17] se demonstrează că nu se poate decide dacă $L(x, y) \cap L_s = \emptyset$ ($L(x, y) \cap L_s \neq \emptyset$ dacă și numai dacă problema lui Post pentru x și y are soluție) și nu se poate decide dacă limbajul $L_0 = \{a, b, c\}^* - L(x, y) \cap L_s$ este egal cu $\{a, b, c\}^*$ sau nu. Din păcate, așa cum se poate vedea ușor folosind condițiile necesare din secțiunea 3.1, limbajele $L(x, y)$ și L_s nu sînt contextuale selective sau generalizate. Să observăm însă că limbajul $L(x)$ poate fi generat cu următoarea gramatică contextuală simplă:

$$G_x = (\{a, b, c\}, \{ba^i cx_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}).$$

Pe de altă parte, $L(x) \cap L(y) = \emptyset$ dacă și numai dacă problema lui Post pentru x și y are soluție. Dacă $L(x) \cap L(y) \neq \emptyset$, atunci, evident, $L(x) \cap L(y)$ este un limbaj infinit. Avem deci

Teorema 5.5. *Nu se poate decide dacă intersecția a două limbaje contextuale exterioare de orice tip este vidă, finită sau infinită.*

Teorema este adevărată și pentru gramaticile contextuale interioare selective. (Evident, limbajul $L(x)$ este în familia $\mathcal{L}_s$.)

În continuare vom lucra cu două limbaje care au gramatici mai simple și anume cu $L'(x) = L(x) \cup \{c\}$, $L'(y) = L(y) \cup \{c\}$. Limbajul $L'(x)$ poate fi generat cu gramatica contextuală simplă

$$G'_x = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}).$$

Evident, $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$ dacă și numai dacă $L(x) \cap L(y) \neq \emptyset$, deci nu se poate decide dacă $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$.

Teorema 5.6. Problema egalității pentru limbajele contextuale selective (efective) este nedecidabilă.

Demonstrație. Fie limbajele $L'(x)$ și $L'(y)$ definite anterior pentru x, y n -upluri arbitrare de cuvinte nenule peste $\{a, b\}$ și fie gramatica contextuală selectivă $G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle ba^i, y_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \varphi)$ unde

$$\varphi(z) = \{\langle ba^i, y_i \rangle \mid ba^i z y_i \notin L'(x)\}, z \in L'(y),$$

$$\varphi(z) = \emptyset \text{ pentru } z \notin L'(y).$$

Evident, $L(G) = L'(y)$ dacă și numai dacă $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$. În concluzie, nu se poate decide dacă $L(G) = L'(y)$, deci dacă gramaticile G și G'_y sînt echivalente. Ambele gramatici sînt efective, deci demonstrația este completă.

Corolar. Problema incluziunii pentru gramaticile contextuale selective (efective) este nedecidabilă.

Teorema 5.7. Problema finitudinii pentru gramaticile contextuale selective (efective) este nedecidabilă.

Demonstrație. Fie limbajul $L'(y)$, gramatica G'_y ca mai sus și fie mulțimile $C_i(G'_y)$ construite ca în demonstrația lemei 3.6:

$C_i(G'_y) = \{x \in L(G'_y) \mid x \text{ are o derivare în raport cu gramatica } G'_y \text{ în care apar cel mult } i \text{ contexte}\}.$

Mulțimile $C_i(G'_y)$ sînt finite și se pot calcula algoritmic. Apartenența la limbajul L'_y este, de asemenea, rezolvabilă algoritmic. Să observăm că are loc egalitatea

$$L(G'_y) = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i(G'_y).$$

Construim următoarea gramatică contextuală selectivă:

$$G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle ba^i, y_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \varphi)$$

unde

$$\varphi(z) = \{\langle ba^i, y_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\} \text{ dacă } z \in C_r(G'_y) \text{ astfel încît } C_r(G'_y) \cap$$

$$\cap L'(x) = \{c\},$$

$$\varphi(z) = \emptyset \text{ în celelalte cazuri.}$$

Să observăm că limbajul $L(G)$ este infinit dacă și numai dacă pentru orice r și $z \in C_r(G'_y)$ avem $\varphi(z) \neq \emptyset$, deci $C_r(G'_y) \cap L'(x) = \{c\}$. Prin urmare, $L(G)$ este infinit dacă și numai dacă $\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i(G'_y)\right) \cap L'(x) = \{c\}$ deci dacă și numai dacă $L'(y) \cap L'(x) = \{c\}$. Deoarece acest lucru este nedecidabil, rezultă că nu putem decide algoritmic nici dacă limbajul $L(G)$ este infinit sau nu.

Definiția 5.1. Fie G o gramatică contextuală de orice tip. Spunem că gramatica G este ambiguă dacă și numai dacă există un șir $x \in L(G)$ care are două derivări distincte în raport cu G . Un limbaj contextual este inerent ambiguu (în raport cu o anumită clasă de gramatici) dacă orice gramatică contextuală (din clasa respectivă) care îl generează este ambiguă.

Teorema 5.8. Problema dacă o gramatică contextuală exterioară de orice tip este ambiguă sau nu este nedecidabilă.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm afirmația pentru gramaticile contextuale simple. Fie x, y două n -upluri de cuvinte nenule peste vocabularul $\{a, b\}$ și fie gramatica liniară $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, S, P)$ cu $P = \{S \rightarrow ba^i S x_i \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{S \rightarrow ba^i S y_i \mid i = 1, \dots, n\} \cup \{S \rightarrow c\}$. În [20] se demonstrează, folosind o formă a problemei lui Post diferită de cea pe care am enunțat-o aici, dar echivalentă cu ea, că nu se poate decide algoritmic dacă această gramatică este ambiguă sau nu. Gramatica G fiind 1-liniară, se poate construi gramatica contextuală simplă $G' = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle ba^i, x_i \rangle, \langle ba^i, y_i \rangle \mid i = 1, \dots, n\})$ echivalentă cu G . Evident, gramatica G' este ambiguă dacă și numai dacă gramatica G este ambiguă. Problema ambiguității lui G' este deci nedecidabilă.

Observația 5.1. Există limbaje inerent ambigui în raport cu clasa gramaticilor contextuale simple. Într-adevăr, în [21] se arată că limbajul $L = \{a^m c a^n \mid m \geq n \geq 0\}$ este inerent ambiguu în raport cu clasa gramaticilor 1-liniare. El este deci inerent ambiguu și în raport cu clasa gramaticilor contextuale simple.

Următoarea gramatică contextuală selectivă generează limbajul L și nu este ambiguă, deci limbajul L nu este inerent ambiguu în raport cu clasa gramaticilor contextuale selective:

$$G = (\{a, c\}, \{c\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle a, a \rangle\}, \varphi)$$

$$\varphi(a^i c) = \{\langle a, \lambda \rangle, \langle a, a \rangle\}, i \geq 0,$$

$$\varphi(a^i c a^j) = \{\langle a, a \rangle\}, i \geq j > 0,$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

De fapt, nu există limbaje inerent ambigui în raport cu clasa gramaticilor contextuale selective (sau 3-contextuale). Într-adevăr, fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă. Următoarea procedură (care nu este un algoritm!) conduce la o gramatică echivalentă neambiguă. Ordonăm crescător șirurile din V^* . Mulțimile V, B, C rămân neschimbate; modificăm funcția φ în felul următor: Examinăm mulțimile $\varphi(x)$ pentru fiecare $x \in V^*$. Fie E mulțimea șirurilor examinate la un moment dat și fie $x \in V^*$ — E , primul șir în ordonarea aleasă. Eliminăm din $\varphi(x)$ toate contextele $\langle u, v \rangle$ cu proprietatea că uxv este în $L(G)$ și are două derivări în raport cu funcția φ restrânsă la mulțimea E (și modificată conform procedurii). Adăugăm pe x la mulțimea E și continuăm. În felul acesta obținem o gramatică $G' = (V, B, C, \varphi')$ unde $\varphi'(x) \subseteq \varphi(x)$ pentru orice x , $L(G) = L(G')$, dar funcția φ' nu permite derivări multiple ale șirurilor din $L(G)$. Rezultă că gramatica G' este neambiguă, deci limbajul $L(G)$ nu este inerent ambiguu.

Observația 5.2. Am folosit de multe ori mulțimile $K_i(L)$ pentru L limbaj contextual selectiv. Aceste mulțimi sînt calculabile algoritmic pentru orice limbaj $L \in \mathcal{S}_c$. Într-adevăr, așa cum s-a arătat în demonstrația lemei 3.6, avem incluziunea $K_i(L(G)) \subseteq C_i(G)$ pentru orice gramatică G . Deoarece mulțimile $C_i(G)$ sînt finite și pot fi construite algoritmic, rezultă că și mulțimile $K_i(L(G))$ pot fi construite algoritmic.

Definiția 5.2. O gramatică contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ se zice *redușă* dacă și numai dacă oricare ar fi $x \in B$ avem $L(G) \neq L(G')$ unde $G' = (V, B - \{x\}, C, \varphi)$ (nici un șir nu poate fi eliminat din B). Gramatica G se zice *complet redusă* dacă și numai dacă $B = K_0(L(G))$. Definiții analoage au loc pentru gramaticile contextuale simple.

Teorema 5.9. *Se poate decide algoritmic dacă o gramatică contextuală simplă sau selectivă efectivă este sau nu redusă și oricare ar fi o gramatică contextuală simplă sau selectivă se poate construi o gramatică contextuală de același tip, echivalentă, redusă.*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă efectivă. Construim (algoritmic — vezi observația 5.2) mulțimea $K_0(L(G))$ și ordonăm șirurile din $B - K_0(L(G))$ sub forma $z_1, z_2, \dots, z_k, |z_i| \leq |z_{i+1}|, 1 \leq i \leq k-1$. Considerăm gramatica contextuală selectivă $G' = (V, K_0(L(G)), C, \varphi)$. Dacă șirul z_1 este în $L(G')$ (și acest lucru se poate verifica algoritmic), atunci el se poate elimina din B fără a modifica limbajul generat. În caz contrar, z_1 fiind cel mai scurt șir din $B - K_0(L(G))$, el nu se poate obține din alte șiruri din $B - K_0(L(G))$, deci el nu se poate elimina din baza gramaticii G . Construim gramatica $G'' = (V, K_0(L(G)) \cup \{z_1\}, C, \varphi)$ și continuăm cu z_2, z_3 etc. În final obținem o gramatică redusă echivalentă cu G și de același tip cu aceasta. Dacă nici un șir din B nu s-a putut elimina prin algoritmul anterior, atunci gramatica G este redusă; în caz contrar ea nu este redusă. Evident, raționamentul anterior este valabil și pentru gramaticile contextuale simple și demonstrația este completă.

Teorema 5.10. *Se poate decide algoritmic dacă o gramatică contextuală simplă sau selectivă efectivă este complet redusă și oricare ar fi o gramatică contextuală selectivă efectivă se poate construi o gramatică contextuală selectivă efectivă complet redusă echivalentă.*

Demonstrație. Deoarece mulțimea $K_0(L(G))$ este calculabilă algoritmic pentru orice gramatică contextuală selectivă efectivă, G , rezultă că prima afirmație din enunț este adevărată.

Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă efectivă. Conform teoremei anterioare putem presupune că ea este redusă. Construim gramatica $G' = (V, K_0(L(G)), C', \varphi')$ unde componentele C' și φ' sînt construite astfel. Fie $x \in B - K_0(L(G))$. Există $z \in K_0(L(G))$ astfel încît $x = uzv$, $u, v \in V^*$. Fie C_0 mulțimea tuturor contextelor $\langle u, v \rangle$ construite astfel pentru toate cuvintele din $B - K_0(L(G))$. Punem $C' = C \cup C_0$. Definim atunci

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \cup \{ \langle u, v \rangle \in C_0 \mid uxv \in B - K_0(L(G)) \} \text{ pentru } x \in K_0(L(G)),$$

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \text{ pentru } x \notin K_0(L(G)).$$

Evident, $L(G) = L(G')$, iar G' este o gramatică contextuală selectivă efectivă complet redusă.

Observația 5.3. Pentru gramaticile contextuale simple nu există întotdeauna o gramatică contextuală simplă echivalentă complet redusă. Într-adevăr, fie gramatica $G = (\{a, b\}, \{b, b^2\}, \{\langle \lambda, a \rangle\})$. Avem egalitatea $L(G) = \{ba^n, b^2a^n \mid n \geq 0\}$. Orice gramatică contextuală simplă $G' = (V, B, C)$ pentru limbajul $L(G)$ trebuie să aibă $\{b, b^2\} \subseteq B$. Deoarece $K_0(L(G)) = \{b\}$, rezultă că nici o gramatică contextuală simplă pentru acest limbaj nu poate fi complet redusă.

Observația 5.4. Evident, noțiunea de gramatică redusă se poate defini pentru toate tipurile de gramatici contextuale și pentru toate clasele de gramatici contextuale discutate pînă acum este adevărată o teoremă de tipul teoremei 5.9. O noțiune asemănătoare poate fi definită cu referire la contextele unei gramatici contextuale. Problemele decidabilității și construirii unei gramatici reduse (în acest sens) echivalentă cu o gramatică dată rămîn deschise (P6).

Observația 5.5. Deoarece limbajele $L'(x), L'(y)$ sînt contextuale interioare selective efective rezultă că teoremele 5.6 și 5.7 pot fi transpuse și pentru gramaticile interioare selective. Au rămas însă o serie de probleme de decizie nestudiate, mai ales pentru gramaticile contextuale simple generalizate și interioare. În particular, problemele echivalenței și incluziunii pentru aceste gramatici sînt încă deschise (P7).

Indicații bibliografice. Majoritatea rezultatelor din acest capitol sînt din [65]. Despre problemele finitudinii și trivialității limbajelor contextuale simple se discută și în [42], iar cîteva teoreme referitoare la $\mathcal{T}$ (în lipsa incluziunii $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{T}$) se dau în [49]. Multe demonstrații sînt prezentate aici într-o formă nouă.

COMPLEXITATEA SINTACTICĂ A LIMBAJELOR CONTEXTUALE

Definiția 6.1. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică 3-contextuală. Definim

$$Baz(G) = \text{card } B,$$

$$Con(G) = \text{card } C,$$

$$Fi(G) = \text{card } \{M \subseteq C \mid \text{există } x_1, x_2, x_3 \in V^* \text{ astfel încât } M = \varphi(x_1, x_2, x_3)\}.$$

Se obțin astfel trei măsuri ale complexității sintactice a gramaticilor 3-contextuale, evaluând, respectiv, numărul de șiruri din bază, numărul de contexte și numărul submulțimilor lui C care intră în definiția aplicației φ . Aceste măsuri se particularizează în mod evident pentru celelalte clase de gramatici contextuale. Măsura Fi nu are sens decât pentru gramaticile în definiția cărora intră o funcție de selecție. Pentru gramaticile contextuale generalizate considerăm două măsuri de tip Baz ,

$$Baz_i(G) = \text{card } B_i, \quad i = 1, 2.$$

Măsurile astfel definite se extind în mod natural la limbajele contextuale de diferite tipuri.

Evident, pentru orice limbaj contextual selectiv L avem $Baz(L) = \text{card } K_0(L)$ (a se vedea demonstrația teoremei 5.10).

Definiția 6.2. O măsură K a complexității sintactice a limbajelor dintr-o familie $\mathcal{L}$ de limbaje se numește *conexă* dacă și numai dacă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ există un limbaj $L_n \in \mathcal{L}$ astfel încât $K(L_n) = n$.

De obicei, faptul că o măsură K se referă la limbajele dintr-o familie $\mathcal{L}$ (implicit, se referă la acea clasă de gramatici $\mathcal{G}$ care generează limbajele din familia $\mathcal{L}$) se indică scriind $K_{\mathcal{L}}$ (sau $K_{\mathcal{G}}$). Atunci când nu există pericol de confuzie vom scrie totuși simplu K în loc de $K_{\mathcal{L}}$.

Deoarece gramaticile contextuale simple sînt cazuri particulare de gramatici contextuale selective, considerăm că avem o relație de incluziune între cele două clase de gramatici. În general, dacă avem două clase de gramatici $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ în relația $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$ și o măsură K a complexității sintactice a limbajelor din familia $\mathcal{L}(\mathcal{G}')$, atunci $K_{\mathcal{G}}(L) \geq K_{\mathcal{G}'}(L)$ pentru orice limbaj $L \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Teorema 6.1. Toate măsurile $K_{\mathcal{L}}$, $K \in \{Baz, Con, Fi\}$, $\mathcal{L} \in \{\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{F}\mathcal{S}, \mathcal{F}\}$ sînt conexe.

Demonstrație. Atunci cînd este posibil, vom căuta limbaje $L \in \mathcal{C}$ pentru care $K_{\mathcal{C}}(L) = K_{\mathcal{F}}(L)$, pentru ca în felul acesta problema respectivă să fie rezolvată pentru toate familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{F}$; dacă L este și în $\mathcal{F}$ atunci problema este rezolvată și pentru $\mathcal{F}, \mathcal{F}\mathcal{S}$.

Pentru măsura Baz vom considera limbajele

$$L_n = \{(a^i b^i)^3 \mid i = 1, 2, \dots, n\}, n \geq 1.$$

Fiind un limbaj finit, L_n este în $\mathcal{C} \cup \mathcal{F}$. El poate fi generat cu gramatica $G = (\{a, b\}, L_n, \emptyset)$ deci $Baz_{\mathcal{C}}(L_n) \leq n$. Vom arăta că $Baz_{\mathcal{F}}(L_n) \geq n$ și astfel va rezulta că Baz este măsură conexă pentru orice clasă de gramatici contextuale. Într-adevăr, fie $x = a^i b^i a^i b^i a^i b^i$ și $y = a^j b^j a^j b^j a^j b^j$. Este evident că nu există $x_1, x_2, x_3, u, v \in \{a, b\}^*$ astfel încît $x = x_1 x_2 x_3$, $y = x_1 u x_2 v x_3$. Șirurile din L_n nu pot fi obținute unul din altul prin adăugare de contexte. Orice gramatică pentru L_n va conține L_n în bază, deci va avea $Baz(G) \geq n$.

Pentru gramaticile contextuale generalizate, raționamentul anterior se referă la Baz_1 . Pentru Baz_2 considerăm limbajele

$$L'_n = \{a^p b(c^i d)^p a^p \mid p \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Fie o gramatică $G = (\{a, b, c, d\}, B_1, B_2, C)$ pentru limbajul L'_n . Limbajul B_1 trebuie să fie egal cu $\{b\}$ altfel de la șirurile sale nu mai putem obține șiruri din L'_n (decît pentru $B_2 = \{\lambda\}$, sau $B_2 = \emptyset$, $C = \{\langle \lambda, \lambda \rangle\}$ sau $C = \emptyset$ ceea ce este imposibil deoarece limbajul L'_n este infinit). Contextele din C nu pot conține simboluri c, d deoarece s-ar putea folosi în ordine arbitrară și s-ar ajunge la șiruri care conțin subșiruri $c^i d, c^j d$ cu $i \neq j$. Rezultă că simboluri c și d apar numai în șirurile din B_2 . În orice șir din L'_n este prezent numai un șir din B_2 și anume de forma z^p . Rezultă că există în B_2 șiruri care conțin subșiruri $c^i d$. Acest lucru se întîmplă pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, n$, deci $\text{card } B_2 \geq n$. Evident, $Baz_2(L'_n) \leq n$, deci $Baz_2(L'_n) = n$.

Să considerăm acum limbajele L_n^* , $n \geq 1$, L_n fiind ca mai înainte. Gramatica contextuală simplă $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, x \rangle \mid x \in L_n\})$ generează pe L_n^* și are $Con(G) = n$, deci $Con(L_n^*) \leq n$. Considerăm și gramatica contextuală interioară selectivă $G' = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, x \rangle \mid x \in L_n\}, \varphi)$ cu $\varphi(x) = \{\langle \lambda, x \rangle \mid x \in L_n\}$ pentru orice $x \in L_n$, $\varphi(x) = \emptyset$ în alte cazuri.

Se poate vedea că $L(G') = L_n^*$ deci și $Con_{\mathcal{F}}(L_n^*) \leq n$.

Să considerăm acum o gramatică 3-contextuală $G = (V, B, C, \varphi)$ pentru limbajul L_n^* . Deoarece pentru orice $x, y \in L_n$, $x^i y \in L_n^*$ pentru orice $i \geq 1$, rezultă că există cel puțin un context $\langle u, v \rangle$ astfel încît uv conține un subcuvînt x . Trebuie să existe deci cel puțin n contexte în C , prin urmare, $Con_{\mathcal{F}}(L_n^*) \geq n$ și Con se dovedește a fi o măsură conexă pentru toate familiile mai puțin $\mathcal{F}$. Pentru $\mathcal{F}$ putem lua limbajele

$$L_n = \{a_1, \dots, a_n\}^*$$

și obținem în mod banal $Con_{\mathcal{F}}(L_n) = n$. Nu se cunosc limbaje $L_n \subseteq \{a, b\}^*$ care să demonstreze teorema pentru $Con_{\mathcal{F}}$ (problema P8).

Fie limbajele

$$L_n = \{((a^i b^i)^3 c)^p \mid p \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Gramatica contextuală selectivă $G = (\{a, b, c\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, (a^i b^i)^3 c \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \varphi)$ cu

$$\varphi(x) = \{\langle \lambda, (a^i b^i)^3 c \rangle\} \text{ pentru } x \in \{(a^i b^i)^3 c\}^*, i = 1, \dots, n,$$

$$\varphi(x) = \{\langle \lambda, (ab)^3 c \rangle\} \text{ pentru } x \notin L_n$$

generează limbajul L_n și are $Fi(G) = n$ deci $Fi(L_n) \leq n$. Punînd $\varphi(x) = \emptyset$ pentru $x \notin L_n$, gramatica G generează limbajul L_n și ca gramatică contextuală interioară selectivă deci avem și $Fi_{\mathcal{S}}(L_n) \leq n + 1$.

Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică 3-contextuală care generează limbajul L_n și fie șirurile x_1, x_2, x_3 astfel încît $x_1 x_2 x_3 \in \{(a^i b^i)^3 c\}^*$ pentru i fixat. Există asemenea șiruri astfel încît $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ este format din contexte $\langle u, v \rangle$ cu uv conținînd subcuvinte de forma $a^i b^i c$. Aceste contexte nu pot conține și subșiruri $a^j b^j c$ cu $j \neq i$. Cel puțin n submulțimi ale lui C sînt puse în evidență de aplicația φ , deci $Fi_{\mathcal{S}}(L_n) \geq n$ și teorema este complet demonstrată.

Observația 6.1. Deoarece orice gramatică contextuală simplă este o gramatică contextuală selectivă cu $\varphi(x) = C$ pentru orice $x \in V^*$, rezultă că $Fi_{\mathcal{S}}(L) = 1$ pentru orice limbaj $L \in \mathcal{C}$. Măsura Fi , ca măsură a selectivității unui limbaj, pune în clasa de complexitate cea mai redusă mulțimea limbajelor contextuale simple și numai pe acestea. O afirmație asemănătoare are loc pentru măsura $Fi_{\mathcal{S}}$ și familia $\mathcal{S}$.

Definiția 6.3. O măsură a complexității sintactice K se zice *fidelă* în raport cu două familii de limbaie $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G}')$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$, dacă și numai dacă există $L \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ astfel încît $K_{\mathcal{G}}(L) > K_{\mathcal{G}'}(L)$.

Teorema 6.2. Măsura Baz este fidelă în raport cu perechile $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$, $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$, $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, $(\mathcal{G}, \mathcal{T})$.

Demonstrație. Fie limbajul $L = \{a, aa\}$. Evident, $L \in \mathcal{C}$ și $Baz_{\mathcal{C}}(L) = 2$. Deoarece gramatica $G = (\{a\}, \{a\}, \{\langle \lambda, a \rangle\}, \varphi)$ cu

$$\varphi(a) = \{\langle \lambda, a \rangle\},$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ pentru } x \neq a,$$

generează acest limbaj și are $Baz(G) = 1$, rezultă că $Baz_{\mathcal{S}}(L) = Baz_{\mathcal{T}}(L) = 1$ și avem teorema pentru perechile $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$, $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$.

Fie și limbajul $L = \{bab, baab\}$. Evident, $Baz_{\mathcal{S}}(L) = 2 = Baz_{\mathcal{G}}(L)$. Gramatica 3-contextuală $G = (\{a, b\}, \{bab\}, \{\langle \lambda, a \rangle\}, \varphi)$ cu

$$\varphi(b, a, b) = \{\langle \lambda, a \rangle\},$$

$$\varphi(x, y, z) = \emptyset \text{ în alte cazuri,}$$

generează limbajul L și are $Baz(G) = 1$ deci $Baz_{\mathcal{T}}(L) = 1$.

Problema fidelității măsurilor Con , Fi pentru toate perechile potrivite de familii de limbaie contextuale rămîne deschisă ca și problema fidelității lui Baz față de $(\mathcal{S}, \mathcal{SS})$ și $(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ (problema P9).

Să trecem acum la studierea problemelor Q1 — Q5, formulate în capitolul 1 pentru măsurile complexității sintactice. Vom studia aici numai cazul

gramaticilor și limbajelor contextuale selective, pentru celelalte tipuri de gramatici problemele rămânând a fi investigate în continuare (*problema P10*).

Se observă imediat că problema Q1 are răspunsul afirmativ pentru măsurile *Baz* și *Con* (determinarea lui *Baz* (G) și *Con* (G) este o simplă problemă de numărare a elementelor unor mulțimi finite).

Teorema 6.3. *Problema Q1 are răspunsul negativ pentru măsura Fi pentru gramaticile contextuale selective.*

Demonstrație. Fie limbajele $L'(x)$, $L'(y)$ definite în capitolul 5 pentru două n -upluri de cuvinte nenule peste vocabularul $\{a, b\}$ și fie gramatica contextuală selectivă

$$G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{\langle c, c \rangle\}, \varphi)$$

unde

$$\varphi(z) = \emptyset \text{ pentru } z \notin L'(x),$$

$$\varphi(z) = \{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{\langle c, c \rangle\} \text{ pentru}$$

$$z \in (L'(x) \cap L'(y)) - \{c\},$$

$$\varphi(z) = \{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\} \text{ pentru } z \in (L'(x) - L'(y)) \cup \{c\}.$$

Se observă că dacă $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$, atunci codomeniul aplicației φ este format din două mulțimi: $\emptyset$ și $\{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, iar dacă $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$, atunci se adaugă și mulțimea $\{\langle ba^i, x_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\langle c, c \rangle\}$. În consecință, $Fi(G) = 2$ dacă și numai dacă $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$, deci nu există un algoritm pentru a calcula pe $Fi(G)$.

Teorema 6.4. *Toate problemele Q1 — Q5 au răspunsul afirmativ pentru măsura Baz pentru gramaticile contextuale efective.*

Demonstrație. Teorema este o consecință a observației că $Baz(L) = K_0(L)$ pentru orice limbaj $L \in \mathcal{S}$ și a faptului că pentru orice gramatică contextuală selectivă efectivă putem construi efectiv o gramatică contextuală selectivă complet redusă echivalentă (teorema 5.10). În concluzie, problema Q5 are răspunsul afirmativ pentru *Baz* și $\mathcal{S}$. Deoarece și problema Q1 are răspunsul afirmativ pentru *Baz* și $\mathcal{S}$, rezultă că și problema Q2 are răspunsul afirmativ, deci și Q3 și Q4 au același răspuns.

În general, răspunsul pozitiv la Q1 și Q5 atrage după sine răspunsul afirmativ la Q2 și Q4, iar răspunsurile afirmative la Q1 și Q2 implică răspunsul afirmativ la Q4. Pentru măsurile *Con* și *Fi* problemele Q2 — Q5 au însă numai răspunsuri negative.

Teorema 6.5. *Problema Q3 pentru Con pentru gramaticile contextuale selective are răspunsul negativ pentru orice $n \geq 0$.*

Demonstrație. Am văzut (teorema 5.7) că problema finitudinii nu este decidabilă pentru gramaticile contextuale selective. Deoarece $Con(L) = 0$ dacă și numai dacă limbajul L este finit, rezultă că nu putem decide dacă $Con(L(G)) = 0$ pentru o gramatică contextuală selectivă (efectivă) arbitrară G .

Pentru $n > 0$ oarecare, să considerăm limbajul L_n dat de teorema 6.1 pentru $Con_{\mathcal{S}}$ ($Con_{\mathcal{S}}(L_n) = n$) pe vocabularul $\{d, e\}$. Fie limbajul $L'_n = L_n \cup L(G)$, $G = (\{a, b, c\}, B, C, \varphi)$ arbitrară. Evident, $Con(L'_n) = n$ dacă și numai dacă $Con(L(G)) = 0$. (Dacă $L_1, L_2 \in \mathcal{S}$, atunci $Con(L_1 \cup L_2) \leq Con(L_1) +$

+ $Con(L_2)$ — demonstrația teoremei 4.1. Dacă L_1, L_2 au vocabulare disjuncte, atunci avem egalitatea $Con(L_1 \cup L_2) = Con(L_1) + Con(L_2)$. Nu se poate deci decide dacă avem $Con(L'_n) = n$ sau nu.

Corolar. Problemele Q2 și Q5 referitoare la Con au răspunsul negativ pentru gramaticile contextuale selective.

Întotdeauna răspunsul afirmativ la Q1 și negativ la Q3 implică răspunsuri negative la Q2 și Q5.

Teorema 6.6. Problema Q4 are răspunsul negativ pentru Con pentru gramaticile contextuale selective.

Demonstrație. Fie limbajele $L'(x), L'(y)$ pentru n -uplurile x, y de cuvinte nenule peste $\{a, b\}$ și fie gramatica G'_y pentru $L'_y(y)$ ca în capitolul 5. Construim următoarea gramatică contextuală selectivă:

$$G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle\}, \varphi)$$

unde

$$\varphi(z) = \{\langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle\} \text{ dacă } C_{|z|}(G'_y) \cap L'(x) = \{c\},$$

$$\varphi(z) = \{\langle a, \lambda \rangle\} \text{ dacă } C_{|z|}(G'_y) \cap L'(x) \neq \{c\}$$

pentru orice $z \in \{a, b\}^*$. Se observă că dacă $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$, atunci pentru orice i , $C_i(G'_y) \cap L'(x) = \{c\}$, deci $\varphi(z) = \{\langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle\}$ pentru orice $z \in \{a, b\}^*$, deci a și b apar de o infinitate de ori în șirurile din $L(G)$. În consecință, $Con(L(G)) = 2$.

Dacă însă $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$, atunci există un număr n_0 astfel încât toate mulțimile $C_i(G'_y)$ conțin elemente din $L'(x)$ diferite de c pentru orice $i \geq n_0$. În consecință, în afară de cuvintele de lungime mai mică sau egală cu n_0 , celelalte cuvinte din limbajul $L(G)$ nu mai conțin simbolul b . Atunci, o gramatică contextuală selectivă cu $B = \{w \in L(G) \mid |w| \leq n_0\}$ și $C = \{\langle a, \lambda \rangle\}$ va putea genera limbajul $L(G)$. Rezultă deci că avem $Con(L(G)) = 1$. Dar $Con(G) = 2$. Nu se poate deci decide dacă $Con(G) = Con(L(G))$, deoarece nu se poate decide dacă $Con(L(G)) = 2$. Obținem astfel răspunsul negativ la problema Q4 pentru Con .

Lema 6.1. Problema dacă o gramatică contextuală selectivă generează sau nu un limbaj contextual simplu este nedecidabilă.

Demonstrație. Să considerăm gramatica contextuală selectivă G din demonstrația teoremei 6.3. Dacă $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$, atunci definiția funcției φ se reduce la

$$\varphi(z) = \emptyset \text{ pentru } z \notin L'(x),$$

$$\varphi(z) = \{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\} \text{ pentru } z \in L'(x),$$

prin urmare, $L(G) = L'(x)$, deci $L(G)$ este limbaj contextual simplu.

Invers, dacă $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$, atunci $L'(x) \cap L'(y)$ este limbaj infinit și pentru o infinitate de șiruri z avem $\varphi(z) = \{\langle ba^i, x_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{\langle c, c \rangle\}$. Orice gramatică pentru limbajul $L(G)$ trebuie atunci să conțină un context $\langle u, v \rangle$ în care apare simbolul c . Acest context nu se poate aplica oricând, ci numai pentru șiruri care sînt în mulțimea $\{c\} (L'(x) \cap L'(y)) \{c\}$. Este deci nevoie de o funcție de selecție care să reglementeze aplicarea acestui context, deci limbajul $L(G)$ nu poate fi contextual simplu.

În concluzie, nu se poate decide dacă gramatica G generează un limbaj contextual simplu sau nu.

Teorema 6.7. Problema Q3 pentru Fi referitoare la gramaticile contextuale selective are răspunsul negativ pentru orice $n \geq 1$.

Demonstrație. Fie gramatica G din demonstrația teoremei 6.3. Conform lemei anterioare, nu se poate decide dacă $L(G)$ este limbaj contextual simplu sau nu, deci nu se poate decide dacă $Fi(L(G)) = 1$. Avem astfel teorema pentru $n = 1$.

Pentru $n > 1$ procedăm ca în demonstrația teoremei 6.5, reunind la limbajul $L(G)$ un limbaj L_{n-1} ca în demonstrația teoremei 6.1 (pe vocabularul $\{d, e\}$). Evident, $Fi(L(G) \cup L_{n-1}) = Fi(L(G)) + Fi(L_{n-1}) = n-1 + Fi(L(G))$. În consecință, $Fi(L(G) \cup L_{n-1}) = n$ dacă și numai dacă $Fi(L(G)) = 1$, ceea ce este nedecidabil și astfel avem afirmația din enunț pentru orice n .

Corolar. Problema Q2 are răspunsul negativ pentru Fi pentru gramaticile contextuale selective.

(Răspunsul negativ la Q3 implică răspunsul negativ la Q2, indiferent de răspunsul la alte probleme.)

Teorema 6.8. Problema Q4 pentru Fi are răspunsul negativ pentru gramaticile contextuale selective.

Demonstrație. Fie gramatica G din demonstrația teoremei 6.3. Am văzut că $Fi(G) = 2$ sau $Fi(G) = 3$ și nu se poate decide dacă $Fi(G) = 2$ sau nu. Dacă $Fi(G) = 2$, atunci înseamnă că $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$. În acest caz, $L(G) = L'(x)$, deci $L(G)$ este limbaj contextual simplu și $Fi(L(G)) = 1$. Invers, dacă $Fi(L(G)) = 1$, atunci înseamnă că funcția φ este definită la fel pe toată mulțimea V^* deci avem $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$.

Prin urmare, $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$ dacă și numai dacă $Fi(G) = 2$ și dacă și numai dacă $Fi(L(G)) = 1$.

Pe de altă parte, $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$ dacă și numai dacă $Fi(G) = 3$. Vom demonstra că $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$ dacă și numai dacă $Fi(L(G)) = 3$ deci $Fi(G) = Fi(L(G))$ dacă și numai dacă $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$, ceea ce este nedecidabil și astfel teorema va fi demonstrată.

Implicația $Fi(L(G)) = 3 \Rightarrow L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$ este evidentă. Să presupunem că $L'(x) \cap L'(y) \neq \{c\}$. Atunci $L'(x) \cap L'(y)$ este o mulțime infinită și cel puțin un context $\langle u, v \rangle$ în care apare simbolul c trebuie folosit de o infinitate de ori. Rezultă că $Fi(L(G)) > 1$; aplicația φ trebuie definită diferit pe mulțimile $L'(x) \cap L'(y) - \{c\}$, $(L'(x) - L'(y)) \cup \{c\}$. Pentru w în aceste mulțimi trebuie să avem $\varphi(w) \neq \emptyset$. Pentru $w \notin L'(x)$ nu putem avea $\varphi(w)$ egal cu $\varphi(z)$, $z \in L'(x) \cap L'(y) - \{c\}$ sau $z \in (L'(x) - L'(y)) \cup \{c\}$ deoarece șiruri de forma czc sînt în limbajul $L(G)$, dar nu sînt în $L'(x)$. Dacă $\varphi(czc)$ ar conține un context $\langle ba^i, x_i \rangle$, atunci ar rezulta că șirul $ba^i c z c x_i$ este în $L(G)$ ceea ce nu este posibil. Rezultă că aplicația φ trebuie definită într-un mod diferit pe complementara lui $L'(x)$, deci $Fi(L(G)) \geq 3$ și demonstrația este completă.

Teorema 6.9. Problema Q5 pentru Fi are răspunsul negativ pentru gramaticile contextuale selective.

Demonstrație. Fie din nou gramatica G din demonstrația teoremei 6.3. Am văzut că $Fi(L(G)) = 1$ sau $Fi(L(G)) = 3$ și nu se poate decide care dintre aceste valori este cea reală. În demonstrația teoremei anterioare am văzut că orice gramatică contextuală selectivă pentru limbajul $L(G)$ trebuie să aibă aplicația φ definită în mod diferit pe $L'(x) \cap L'(y) - \{c\}$, $(L'(x) - L'(y)) \cup \{c\}$, $V^* - L'(x)$. Fie G' o asemenea gramatică pentru limbajul $L(G)$. Dacă $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$, atunci ar trebui ca φ să fie definită la fel peste toată mulțimea V^* deoarece $Fi(L(G)) = 1$. Acest lucru nu se întâmplă deoarece funcția φ ră-

mîne definită diferit pe $L'(x)$ și pe complementara acestui limbaj, indiferent deci de faptul dacă $L'(x) \cap L'(y)$ este sau nu egal cu $\{c\}$. În acest caz gramatica G' nu este cea mai simplă pentru limbajul $L(G)$ și trebuie construită alta. Pentru a face o asemenea construcție trebuie să știm că $L'(x) \cap L'(y) = \{c\}$ ceea ce este nedecidabil.

În concluzie, toate problemele Q1 — Q5 pentru măsura Fi au răspunsul negativ.

O altă problemă legată de măsurarea complexității sintactice a limbajelor se referă la relația dintre ambiguitate și complexitate. În general, aceste două noțiuni sînt contradictorii [24]. Situația este asemănătoare și pentru gramaticile contextuale selective.

Teorema 6.10. *Pentru orice $n \geq 1$ există un limbaj contextual selectiv L , neambiguu, cu $Baz(L) = n$, $Fi(L) = n$, pentru care orice gramatică G cu $Baz(G) = Baz(L)$ și $Fi(G) = Fi(L)$ este ambiguă.*

Demonstrație. Fie limbajul $L = \{a^p c a^q \mid p \geq q \geq 0\}$. În [21] se demonstrează că orice gramatică 1-liniară pentru acest limbaj este ambiguă. Orice gramatică contextuală simplă pentru limbajul L este deci ambiguă. Prin urmare, orice gramatică G pentru L astfel încît $Baz(G) = Fi(G) = Baz(L) = Fi(L) = 1$ este ambiguă.

Așa cum am văzut în observația 5.1, limbajul L nu este ambiguu ca limbaj contextual selectiv.

Pentru $n = 1$ teorema este demonstrată. Pentru $n > 1$ construim limbajul

$$L_{n-1} = \{(bc^k)^m b a^k b \mid 1 \leq k \leq n-1, m \geq 0\}.$$

Ca în demonstrația teoremei 6.1, putem vedea că $Baz(L_{n-1}) = Con(L_{n-1}) = Fi(L_{n-1}) = n-1$. Limbajul L_{n-1} nu este ambiguu ca limbaj contextual selectiv. Obținem $Baz(L \cup L_{n-1}) = Fi(L \cup L_{n-1}) = n$ și orice gramatică cu $Baz(G) = Fi(G) = n$ care generează limbajul $L \cup L_{n-1}$ este ambiguă deoarece conține o „subgramatică” ambiguă pentru limbajul L . Teorema este deci adevărată pentru orice n .

Indicații bibliografice. Măsurile Baz , Con și Fi au fost definite în [65] și studiate acolo pentru gramaticile contextuale selective (efective). Toate rezultatele din acest capitol se găsesc în [65] cu excepția părților din teorema 6.1 referitoare la gramatici deferite de cele contextuale selective. Noțiunea de măsură fidelă este introdusă aici. În [30] se găsesc cîteva rezultate referitoare la partiția V^*/φ , unde $x\varphi y$ dacă și numai dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$.

GRAMATICI CONTEXTUALE CU RESTRICȚII ÎN DERIVARE

Vom transpune în continuare câteva restricții în derivare de la gramaticile Chomsky la gramaticile contextuale. Vom impune aceste restricții numai gramaticilor contextuale simple și contextuale interioare, deoarece aceste gramatici au o putere generativă considerabil mai mică decât gramaticile contextuale selective sau interioare selective. Vom considera cele patru restricții amintite în capitolul 1: restricția matricială, programarea, controlarea și condiționarea. Ne va interesa în special puterea generativă a gramaticilor obținute.

7.1. Gramatici contextuale matriciale

Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă. Atașăm fiecărui context $\langle u, v \rangle \in C$ o etichetă $e(\langle u, v \rangle)$ și de asemenea, fiecărui cuvânt $x \in B$ o etichetă $e(x)$. Fie $e(B)$, respectiv, $e(C)$ mulțimile etichetelor corespunzătoare elementelor din B și C . Presupunem că aplicația e este injectivă (la elemente distincte, șiruri sau contexte, li se atașează etichete distincte).

Definiția 7.1. O gramatică contextuală matricială este o pereche (G, M) unde $G = (V, B, C)$ este o gramatică contextuală simplă, iar M este o mulțime finită de secvențe de forma $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, unde $n \geq 1$ și $c_1 \in e(C) \cup e(B)$, $c_i \in e(C)$, $i = 2, \dots, n$. Limbajul generat de gramatica (G, M) este

$$L(G, M) = \{u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C \text{ pentru toți } i \text{ și există } k_1, k_2, \dots, k_s \text{ astfel încât } k_s = n \text{ și } (e(x), e(\langle u_1, v_1 \rangle), \dots, e(\langle u_{k_1}, v_{k_1} \rangle), (e(\langle u_{k_1+1}, v_{k_1+1} \rangle), \dots, e(\langle u_{k_{i+1}}, v_{k_{i+1}} \rangle))) \text{ aparțin mulțimii } M \text{ pentru orice } i = 1, 2, \dots, s-1\}.$$

Vom nota cu $\mathcal{CM}$ familia limbajelor contextuale matriciale.

Teorema 7.1. Avem egalitatea $\mathcal{CM} = \mathcal{C}$.

Demonstrație. Incluziunea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{CM}$ este evidentă (luăm mulțimea M formată din secvențe cu un singur element).

Fie (G, M) cu $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală matricială. Construim gramatica contextuală simplă $G' = (V, B', C')$ cu

$$B' = \{u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid n \geq 0, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, 1 \leq i \leq n, (e(x), e(\langle u_1, v_1 \rangle), \dots, e(\langle u_n, v_n \rangle)) \in M\},$$

$C' = \{ \langle u_n \dots u_1, v_1 \dots v_n \rangle \mid n \geq 1, \langle u_i, v_i \rangle \in C \text{ și } (e(\langle u_1, v_1 \rangle), \dots, e(\langle u_n, v_n \rangle)) \in M \}$.

Deoarece M este mulțime finită, rezultă că B' și C' sînt mulțimi finite. Evident, folosirea unei matrici din M este echivalentă cu un pas într-o derivare în raport cu G' și invers. Obținem $L(G') = L(G, M)$ deci $\mathcal{CM} = \mathcal{C}$ și teorema este demonstrată.

Definiția 7.2. O gramatică contextuală interioară matricială este o pereche (G, M) cu $G = (V, B, C)$ gramatică contextuală interioară și cu M ca mai înainte. Pentru $x, y \in V^*$ scriem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă există $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ în V^* astfel încît $x = z_1, y = z_{n+1}$ și se întîmplă una dintre următoarele situații:

i) $z_1 \in B, z_i = x_i w_i y_i, z_{i+1} = x_i u_i w_i v_i y_i$ pentru $\langle u_i, v_i \rangle \in C, x_i, w_i, y_i \in V^*, i = 1, 2, \dots, n$ și $(e(z_1), e(\langle u_1, v_1 \rangle), \dots, e(\langle u_n, v_n \rangle)) \in M$,

ii) $z_i = x_i w_i y_i, z_{i+1} = x_i u_i w_i v_i y_i$ pentru $\langle u_i, v_i \rangle \in C, x_i, w_i, y_i \in V^*, i = 1, 2, \dots, n$ și $(e(\langle u_1, v_1 \rangle), \dots, e(\langle u_n, v_n \rangle)) \in M$.

Atunci, limbajul generat de gramatica (G, M) este

$$L(G, M) = \{x \in V^* \mid y \xRightarrow{*} x \text{ pentru un șir } y \in B\}.$$

Notăm cu $\mathcal{IM}$ familia limbajelor contextuale interioare matriciale. Spre deosebire de situația gramaticilor contextuale simple, restricția matricială mărește puterea generativă a gramaticilor contextuale interioare, iar această mărire pare foarte mare.

Teorema 7.2. Mulțimea $\mathcal{IM} - \mathcal{T}$ este nevidă.

Demonstrație. Să considerăm următoarea gramatică contextuală interioară matricială: (G, M) cu

$$G = (\{a, b, c, d, e\}, \{\lambda\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle, \langle c, \lambda \rangle, \langle d, \lambda \rangle, \langle e, \lambda \rangle\}),$$

$$M = \{(e_0), (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)\},$$

unde $e_0 = e(\lambda), e_1 = e(\langle a, \lambda \rangle), e_2 = e(\langle b, \lambda \rangle), e_3 = e(\langle c, \lambda \rangle), e_4 = e(\langle d, \lambda \rangle), e_5 = e(\langle e, \lambda \rangle)$.

Orice derivare în gramatica (G, M) constă în pași care folosesc toate contextele gramaticii. Prin urmare, $L(G, M) = \{x \in \{a, b, c, d, e\}^* \mid N(a, x) = N(b, x) = N(c, x) = N(d, x) = N(e, x)\}$. Limbajul $L(G, M)$ nu este în familia $\mathcal{T}$. Într-adevăr, fie un șir de forma $z_i = a^i b^i c^i d^i e^i, i \geq 1$. Toate aceste șiruri sînt în $L(G, M)$, dar nu putem elimina două subcuvinte ale acestui șir astfel încît să obținem un șir din limbajul $L(G, M)$. Un pas de derivare într-o gramatică 3-contextuală folosește un singur context. Șirurile z_i nu pot fi derivate de o gramatică 3-contextuală a limbajului $L(G, M)$, deci $L(G, M) \notin \mathcal{T}$.

Teorema 7.3. Avem incluziunile stricte $\mathcal{I} \subset \mathcal{IM} \subset \mathcal{L}_1$.

Demonstrație. Incluziunea $\mathcal{I} \subset \mathcal{IM}$ este evidentă și faptul că este strictă rezultă din teorema anterioară.

Orice limbaj în $\mathcal{IM}$ are proprietatea A , lucru ce se poate vedea imediat. Deoarece există limbaje dependente de context care nu au această proprietate ($\{a^{2^n} \mid n \geq 1\}$ este limbaj dependent de context [63]), rezultă că este suficient să demonstrăm incluziunea $\mathcal{IM} \subseteq \mathcal{L}_1$.

Fie (G, M) , cu $G = (V, B, C)$, o gramatică contextuală interioară matricială. Vom modifica demonstrația teoremei 3.9 și vom construi o gramatică $G' = (V_N, V, S, P)$, echivalentă cu (G, M) în felul următor. Să presupunem că $M = \{m_1, \dots, m_r\}$, $m_i = (e_1^{(i)}, \dots, e_{p_i}^{(i)})$, $e_1^{(i)} \in c(B) \cup c(C)$, $e_j^{(i)} \in c(C)$ pentru $j > 1$. Atunci,

$V_N = \{S, T\} \cup \{E_j^{(i)}, D_j^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, p_i\}$, iar P conține următoarele reguli:

1) $S \rightarrow E_1^{(i)}x$, $x \in B$ și există o matrice $m_i = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{p_i}^{(i)})$ în M cu $e_1^{(i)} = c(x)$.

(Se începe derivarea folosind o matrice m_i din M a cărei primă componentă este eticheta unui șir din B .)

$$2) E_j^{(i)}a \rightarrow aE_j^{(i)},$$

$$aE_j^{(i)} \rightarrow E_j^{(i)}a, \quad a \in V, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, p_i.$$

(Simbolurile $E_j^{(i)}$ pot circula liber.)

$$3) E_j^{(i)} \rightarrow u_j^{(i)}D_j^{(i)}, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, p_i \text{ și } e_j^{(i)} = e(\langle u_j^{(i)}, v_j^{(i)} \rangle).$$

(Simbolul $E_j^{(i)}$ introduce prima parte a contextului cu eticheta $e_j^{(i)}$ și simbolul $D_j^{(i)}$ care va introduce partea dreaptă a acestui context.)

$$4) D_j^{(i)}a \rightarrow aD_j^{(i)}, \quad a \in V,$$

$$D_j^{(i)} \rightarrow v_j^{(i)}E_{j+1}^{(i)}, \quad j = 1, 2, \dots, p_i - 1,$$

$$D_{p_i}^{(i)} \rightarrow v_{p_i}^{(i)}T, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

(Simbolul $D_j^{(i)}$ merge spre dreapta, introduce șirul $v_j^{(i)}$ și simbolul $E_{j+1}^{(i)}$ care va determina derivarea cu un nou context din matricea m_i . La terminarea matricii se introduce simbolul neterminat T .)

$$5) T \rightarrow \lambda,$$

$$T \rightarrow E_1^{(i)}, \text{ matricea } m_i \text{ este de forma } (e_1^{(i)}, \dots, e_{p_i}^{(i)}) \text{ cu } e_1^{(i)} \in c(C).$$

(Derivarea se încheie sau se reia cu altă matrice.)

Egalitatea $L(G') = L(G, M)$ este evidentă. Deoarece gramatica G' face o singură ștergere într-o derivare, rezultă că limbajul $L(G')$ este dependent de context și demonstrația este completă.

7.2. Gramatici contextuale programate

Definiția 7.3. O gramatică contextuală (interioară) programată este o pereche (G, ψ) , $G = (V, B, C)$ fiind o gramatică contextuală simplă (sau interioară), iar $\psi : B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$. Întotdeauna presupunem că funcția ψ este dată explicit sub formă de perechi din $(B \cup C) \times \mathcal{P}(C)$. Limbajul gene-

rat de gramatica (G, ψ) este mulțimea șirurilor din V^* care au derivări în gramatica G caracterizate de secvențe $x, \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C$ astfel încât $\langle u_1, v_1 \rangle \in \psi(x), \langle u_i, v_i \rangle \in \psi(\langle u_{i-1}, v_{i-1} \rangle), i=1, 2, \dots, n$.
Notăm cu $\mathcal{CP}$ (respectiv, $\mathcal{JP}$) familia limbajelor generate de gramaticile contextuale (interioare) programate.

Teorema 7.4. *Avem următoarele incluziuni stricte: $\mathcal{C} \subset \mathcal{CP} \subset \mathcal{S}_c, \mathcal{I} \subset \mathcal{JP} \subset \mathcal{IS}_c$.*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă sau interioară. Considerăm funcția $\psi: B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$ definită prin $\psi(x) = C, x \in B, \psi(\langle u, v \rangle) = C, \langle u, v \rangle \in C$. Egalitatea $L(G) = L(G, \psi)$ este evidentă, deci avem $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{CP}, \mathcal{I} \subseteq \mathcal{JP}$.

Să considerăm și gramatica programată (G, ψ) cu $G = (V, B, C), \psi: B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$. Construim gramatica contextuală (interioară, dacă (G, ψ) era interioară) $G' = (V, B, C, \varphi)$ unde funcția φ este definită astfel:

i) dacă $x \in L(G, \psi)$ și există o derivare pentru x caracterizată de $z \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, i=1, 2, \dots, n$ cu $\langle u_1, v_1 \rangle \in \psi(z), \langle u_i, v_i \rangle \in \psi(\langle u_{i-1}, v_{i-1} \rangle), i=2, 3, \dots, n$, atunci $\varphi(x) = \psi(\langle u_n, v_n \rangle)$.

ii) dacă $x \notin L(G, \psi)$, atunci $\varphi(x) = \emptyset$.

Se poate ușor vedea că $L(G, \psi) = L(G')$. Deoarece funcția φ este calculabilă algoritmic (mulțimea tuturor derivărilor unui șir $x \in V^*$ în raport cu gramatica (G, ψ) se poate construi algoritmic) rezultă că avem și incluziunile $\mathcal{CP} \subseteq \mathcal{S}_c, \mathcal{JP} \subseteq \mathcal{IS}_c$.

Fie acum limbajul $L = \{a^n | n \geq 0\} \cup \{b^n | n \geq 1\}$. Așa cum am văzut în capitolul 3, acest limbaj nu este în $\mathcal{C} \cup \mathcal{I}$. El poate fi generat cu gramatica contextuală programată $(G, \psi), G = (V, B, C)$ cu $V = \{a, b\}, B = \{\lambda\}, C = \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\}$,
și

$$\psi(\lambda) = C,$$

$$\psi(\langle \lambda, a \rangle) = \{\langle \lambda, a \rangle\},$$

$$\psi(\langle \lambda, b \rangle) = \{\langle \lambda, b \rangle\}.$$

Evident, $L_m(G, \psi) = L_i(G, \psi) = L$, deci incluziunile $\mathcal{C} \subset \mathcal{CP}$ și $\mathcal{I} \subset \mathcal{JP}$ sînt stricte.

În teorema 7.5 vom arăta că $\mathcal{CP} \subset \mathcal{L}_{lin}$; deoarece familia $\mathcal{S}_c$ conține limbaje neliniare, rezultă că incluziunea $\mathcal{CP} \subset \mathcal{S}_c$ este strictă. De asemenea, în teorema 7.6 vom arăta că $\mathcal{JP} \subset \mathcal{L}_1$; deoarece $\mathcal{IS}_c - \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$ rezultă că și incluziunea $\mathcal{JP} \subset \mathcal{IS}_c$ este strictă.

Teorema 7.5. *Avem incluziunea strictă $\mathcal{CP} \subset \mathcal{L}_{lin}$.*

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{CP} \subset \mathcal{S}$ și $\mathcal{L}_{lin} - \mathcal{S} \neq \emptyset$, rezultă că este suficient să demonstrăm incluziunea $\mathcal{CP} \subseteq \mathcal{L}_{lin}$.

Fie (G, ψ) cu $G = (V, B, C), \psi: B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$ o gramatică contextuală programată cu $B = \{x_1, \dots, x_r\}, C = \{\langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_s, v_s \rangle\}$. Construim gramatica liniară $G' = (V_N, V, S, P)$ cu

$$V_N = \{S\} \cup \{B_1, \dots, B_r\} \cup \{C_1, \dots, C_s\},$$

$$P = \{S \rightarrow C_i | i = 1, 2, \dots, s\} \cup \{S \rightarrow B_i | i = 1, 2, \dots, r\} \cup \{C_i \rightarrow$$

$$\rightarrow u_i C_j v_i | \langle u_i, v_i \rangle \in \psi(\langle u_j, v_j \rangle), i, j \in \{1, 2, \dots, s\}\} \cup \{C_i \rightarrow u_i B_j v_i | x_j \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in$$

$$\psi(x_j), i \in \{1, 2, \dots, s\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}\} \cup \{B_j \rightarrow x_j | j = 1, 2, \dots, r\}.$$

Neterminalii B_i, C_j controlează derivarea în același mod în care o face funcția ψ . Singura diferență între derivările în cele două gramatici este faptul că ele merg invers: (G, ψ) pleacă de la șiruri din B și adaugă contexte la exterior, iar G' pleacă de la contexte, adaugă alte contexte în interior și încheie derivarea cu introducerea unui șir din B . Egalitatea $L(G, \psi) = L(G')$ este evidentă și obținem $\mathcal{CP} \subseteq \mathcal{L}_{un}$.

Teorema 7.6. *Avem incluziunea strictă $\mathcal{IP} \subset \mathcal{L}_1$.*

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{IP} \subset \mathcal{IP}_c$ și $\mathcal{L}_1 - \mathcal{IP}_c \neq \emptyset$, rezultă că este suficient să demonstrăm incluziunea. Vom proceda într-un mod asemănător celui urmat în demonstrația teoremei 7.3.

Fie (G, ψ) cu $G = (V, B, C)$, $\psi: B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$ o gramatică contextuală interioară programată. Presupunem că $B = \{x_1, \dots, x_r\}$, $C = \{\langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_s, v_s \rangle\}$. Construim gramatica $G = (V_N, V, S, P)$ cu

$$V_N = \{S\} \cup \{E_i, D_i \mid i = 1, 2, \dots, s\},$$

iar P conține următoarele reguli:

$$1) S \rightarrow E_i x_j, x_j \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in \psi(x_j).$$

(Începe derivarea cu un șir din B . Neterminalii E_i, D_i controlează derivarea la fel cum o face funcția ψ .)

$$2) E_i a \rightarrow a E_i,$$

$$a E_i \rightarrow E_i a, a \in V, i = 1, 2, \dots, s.$$

(Neterminalii E_i circulă liber.)

$$3) E_i \rightarrow u_i D_i,$$

$$D_i a \rightarrow a D_i, a \in V,$$

$$D_i \rightarrow v_i E_j, \langle u_j, v_j \rangle \in \psi(\langle u_i, v_i \rangle), i = 1, 2, \dots, s.$$

(Simbolul E_i introduce șirul u_i , iar D_i introduce șirul v_i la dreapta acestui șir după care introduce un simbol E_j care determină trecerea la un nou context.)

$$4) D_i \rightarrow \lambda, i = 1, 2, \dots, s.$$

Se poate vedea imediat că $L(G') = L(G, \psi)$ și că gramatica G' are spațiul de lucru mărginit (se face o singură ștergere în fiecare derivare). Avem deci $L(G') \in \mathcal{L}_1$ și teorema este demonstrată.

Teorema 7.7. *Familia $\mathcal{G}$ este incomparabilă cu $\mathcal{CP}$ și $\mathcal{IP}$.*

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{G} - \mathcal{IP} \neq \emptyset$ și $\mathcal{I} - \mathcal{G} \neq \emptyset$ (teorema 3.4), rezultă că familia $\mathcal{G}$ este incomparabilă cu $\mathcal{IP}$. Pe de altă parte, $\mathcal{G} - \mathcal{P} \neq \emptyset$ (teorema 3.3), deci este suficient să arătăm că $\mathcal{CP}$ conține limbaje care nu sînt în familia $\mathcal{G}$. Un asemenea limbaj este $L = \{a^n c b^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n c a^n \mid n \geq 0\}$. Acest limbaj este generat de gramatica (G, ψ) cu $G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\})$ și

$$\psi(c) = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\},$$

$$\psi(\langle a, b \rangle) = \{\langle a, b \rangle\},$$

$$\psi(\langle b, a \rangle) = \{\langle b, a \rangle\}.$$

Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată pentru limbajul L . Deoarece B_1 conține numai șiruri de forma xy , rezultă că mulțimea C trebuie să conțină cel puțin un context $\langle u, v \rangle$ cu $u \in \{a\}^+$ și cel puțin un context $\langle u', v' \rangle$ cu $u' \in \{b\}^+$. Folosirea acestor contexte într-o derivare conduce la șiruri care nu sînt în limbajul L . În consecință, $L \notin \mathcal{G}$.

Să examinăm și relația dintre familiile $\mathcal{IM}$ și $\mathcal{IP}$.

Teorema 7.8. *Familiile $\mathcal{IM}$ și $\mathcal{IP}$ sînt incomparabile.*

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{IM} - \mathcal{I} \neq \emptyset$ (teorema 7.2), $\mathcal{IP} \subset \mathcal{IS}_c$ (teorema 7.4) și $\mathcal{IS}_c \subset \mathcal{I}$ (teorema 3.16), rezultă că $\mathcal{IM} - \mathcal{IP} \neq \emptyset$.

Invers, fie limbajul $L = \{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$. Așa cum am văzut în demonstrația teoremei 7.4, acest limbaj este în familia $\mathcal{IP}$. Fie (G, M) , $G = (V, B, C)$, o gramatică contextuală interioară matricială pentru limbajul L . Trebuie să existe cel puțin un context $\langle u, v \rangle \in C$ astfel încît $uv \in \{a\}^+$ și cel puțin un context $\langle u', v' \rangle \in C$ astfel încît $u'v' \in \{b\}^+$ și există în M cel puțin cîte o matrice de forma $(e_1, \dots, e_n)$ cu $e_i \in e(C)$, $i = 1, 2, \dots, n$, pentru fiecare asemenea context, cu $e_j = e(\langle u, v \rangle)$, respectiv, $e_j = e(\langle u', v' \rangle)$ pentru un j oarecare. Aceste matrici se pot folosi una după cealaltă și astfel se pot obține șiruri care conțin simultan apariții ale lui a și ale lui b . Asemenea șiruri nu sînt în limbajul L , deci $L \notin \mathcal{IM}$ și teorema este demonstrată.

7.3. Gramatici contextuale controlate

Definiția 7.4. O gramatică contextuală (interioară) controlată este o pereche (G, K) , unde $G = (V, B, C)$ este o gramatică contextuală simplă (respectiv, interioară), iar K este un limbaj peste $e(B) \cup e(C)$. Fie D o derivare în raport cu gramatica G caracterizată de secvența $x, \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle$, $x \in B$, $\langle u_i, v_i \rangle \in C$. Șirul $e(x)e(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots e(\langle u_n, v_n \rangle)$ se numește cuvînt de control al derivării D și se notează cu $k(D)$. Atunci

$L(G, K) = \{x \in V^* \mid \text{există o derivare } D: z \xrightarrow{*} x \text{ în raport cu } G \text{ astfel încît } k(D) \in K, z \in B\}$.

Notăm cu $\mathcal{CK}$ (respectiv, $\mathcal{IK}$) familia limbajelor generate de gramaticile contextuale simple (interioare) controlate cu limbaje de control regulate.

Gramaticile contextuale cu control regulat caracterizează familia limbajelor liniare. Într-adevăr, avem

Teorema 7.9. *Familiile $\mathcal{CK}$ și $\mathcal{L}_{lin}$ sînt egale.*

Demonstrație. Fie gramatica (G, K) , cu $G = (V, B, C)$, $K \subseteq (e(B) \cup e(C))^*$, $K \in \mathcal{L}_3$. Orice derivare D în raport cu gramatica G are cuvîntul de control de forma $e(x)e(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots e(\langle u_n, v_n \rangle)$. Fie limbajul $K' = K \cap e(B)e(C)^*$. Limbajul $e(B)e(C)^*$ este regulat, deci și limbajul K' este regulat. Evident, avem egalitatea $L(G, K) = L(G, K')$. Fie $G_K = (V_N, e(B) \cup e(C), S, P)$ o gramatică stîng-liniară pentru limbajul K' . Fără pierdere de generalitate, putem presupune că toate regulile din P sînt sau de forma $\bar{A} \rightarrow a$, $a \in e(B)$ sau de forma $\bar{A} \rightarrow Da$, $a \in e(C)$, $\bar{A}, D \in V_N$.

Construim gramatica liniară $G' = (V_N, V, S, P')$ cu

$$P' = \{A \rightarrow uDv \mid A \rightarrow Dc(\langle u, v \rangle) \in P, \langle u, v \rangle \in C\} \cup$$

$$\cup \{A \rightarrow x \mid A \rightarrow e(x) \in P, x \in B\}.$$

Avem egalitatea $L(G') = L(G, K)$. Într-adevăr, orice derivare în gramatica G' corespunde unei derivări în raport cu G_K ; cele două derivări au aceleași simboluri neterminale, diferența fiind că în G_K se introduc etichete ale contextelor și șirurilor iar în G' se introduc contexte și șiruri din B . Șirul obținut în G' are deci o derivare cu cuvîntul control în K' și invers, pentru orice derivare din G_K obținem un șir în G' identic cu șirul identificat în $L(G, K)$ de cuvîntul control dat de această derivare. Incluziunea $\mathcal{L}_{un} \subseteq \mathcal{L}_{in}$ este astfel demonstrată.

Invers, fie $G = (V_N, V, S, P)$ o gramatică liniară. Construim gramatica $G' = (V, B, C)$ cu

$$B = \{x \in V^* \mid \text{există o regulă } A \rightarrow x \in P\},$$

$$C = \{\langle u, v \rangle \mid \text{există o regulă } A \rightarrow uDv \in P\}.$$

Considerăm și gramatica stîng-liniară $G'' = (V_N, e(B) \cup e(C), S, P')$ cu

$$P' = \{A \rightarrow e(x) \mid x \in B \text{ și } A \rightarrow x \in P\} \cup \{A \rightarrow De(\langle u, v \rangle) \mid \langle u, v \rangle \in C \text{ și } A \rightarrow uDv \in P\}.$$

Considerăm gramatica contextuală controlată $(G', L(G''))$. Din nou, orice derivare în raport cu gramatica G corespunde unei derivări în raport cu G'' care dă cuvîntul de control al unei derivări care conduce la un șir din limbajul $L(G)$ identic șirului derivat în gramatica G . Egalitatea $L(G) = L(G', L(G''))$ demonstrează incluziunea $\mathcal{L}_{un} \subseteq \mathcal{L}_{in}$ și teorema este demonstrată.

Corolar. Familia $\mathcal{L}_{in}$ este incomparabilă cu oricare dintre familiile $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \mathcal{I}\mathcal{P}_c, \mathcal{I}\mathcal{P}, \mathcal{G}$, în timp ce familia $\mathcal{L}$ este strict inclusă în $\mathcal{L}_{in}$.

Afirmațiile rezultă în urma rezultatelor secțiunilor 3.2, 3.3, ținînd seama că aceleași relații le are familia $\mathcal{L}_{in}$ cu familiile din enunț.

Teorema 7.10. *Avem următoarele incluziuni stricte: $\mathcal{I}\mathcal{M} \subset \mathcal{I}\mathcal{K}$, $\mathcal{I}\mathcal{P} \subset \mathcal{I}\mathcal{K}$.*

Demonstrație. Deoarece familiile $\mathcal{I}\mathcal{M}$ și $\mathcal{I}\mathcal{P}$ sînt incomparabile (teorema 7.8), rezultă că este suficient să arătăm că avem $\mathcal{I}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}\mathcal{K}$ și $\mathcal{I}\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}\mathcal{K}$.

Fie (G, M) , $G = (V, B, C)$, o gramatică contextuală interioară matricială. Construim limbajul $K = \{e_1 e_2 \dots e_r \mid (e_1, e_2, \dots, e_r) \in M\}^*$. Egalitatea $L(G, M) = L(G, K)$ este evidentă, deci avem $\mathcal{I}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}\mathcal{K}$.

Fie acum gramatica contextuală interioară programată (G, ψ) , $G = (V, B, C)$, $\psi: B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$. Fie limbajul finit

$$R = \{e(x)e(\langle u, v \rangle) \mid x \in B, \langle u, v \rangle \in \psi(x)\} \cup \{e(\langle u, v \rangle)e(\langle u', v' \rangle) \mid \langle u', v' \rangle \in \psi(\langle u, v \rangle), \langle u, v \rangle \in C\}.$$

Construim limbajul $K = D(e(B), R)$ (D fiind operația de prelungire la dreapta definită în capitolul 4). După cum se arată în [75], dacă L_1, L_2 sînt limbaje finite, atunci $D(L_1, L_2)$ este limbaj regulat.

Avem egalitatea $L(G, \psi) = L(G, K)$. Într-adevăr, orice şir $x \in K$ este de forma $e_1 e_2 \dots e_n$ cu $e_i = e(\langle u_i, v_i \rangle)$, $i = 1, 2, \dots, n$, şi $\langle u_{i+1}, v_{i+1} \rangle \in \psi(\langle u_i, v_i \rangle)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ (eventual $e_1 = e(x)$, $x \in B$ şi $\langle u_2, v_2 \rangle \in \psi(x)$). Derivările controlate de aplicaţia ψ pot fi controlate de şiruri din limbajul K şi invers, orice şir din K corespunde unei derivări conforme cu ψ . Obţinem astfel $\mathcal{IP} \subseteq \mathcal{IK}$ şi teorema este demonstrată.

Corolar. Familia $\mathcal{IK}$ conţine limbaje care nu sînt în $\mathcal{I}$.

Corolarul rezultă în urma teoremei 7.2 (familia $\mathcal{IM}$ conţine limbaje care nu sînt în $\mathcal{I}$).

Aşa cum am amintit în capitolul 1, pentru gramaticile independente de context, restricţia matricială, programarea şi controlul regulat au efecte identice. Situaţia de la gramaticile contextuale este cu totul alta: gramaticile contextuale simple conduc la trei subfamilii ale familiei limbajelor liniare formînd o ierarhie, iar gramaticile contextuale interioare conduc la două familii incomparabile ($\mathcal{IM}$ şi $\mathcal{IP}$) şi o suprafamilie a acestora ($\mathcal{IK}$).

Teorema 7.11. Familia $\mathcal{IK}$ este strict inclusă în $\mathcal{L}_1$.

Demonstraţie. Fie (G, K) , $G = (V, B, C)$, $K \subseteq (e(B) \cup e(C))^*$, $K \in \mathcal{L}_3$, o gramatică contextuală interioară controlată, $B = \{x_1, \dots, x_r\}$, $C = \{\langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_s, v_s \rangle\}$. Considerăm că avem $K \subseteq e(B)e(C)^*$ (luăm limbajul K' din demonstraţia teoremei 7.9) şi fie $G_K = (V_N, e(B) \cup e(C), S, P)$ o gramatică regulată care generează limbajul K (cu reguli de forma $S \rightarrow e(x)A$, $x \in B$, $A \rightarrow e(\langle u, v \rangle)D$, $A \rightarrow e(\langle u, v \rangle)$, $\langle u, v \rangle \in C$). Construim gramatica $G' = (V'_N, V, S, P')$ cu

$$V'_N = V_N \cup \{[A, u, v] \mid A \in V_N, \langle u, v \rangle \in C\}$$

şi cu regulile următoare:

- 1) $S \rightarrow xA$, dacă $x \in B$, $S \rightarrow e(x)A \in P$.

(Începem derivarea conform unei derivări în gramatica G_K .)

- 2) $Aa \rightarrow aA$,

$$aA \rightarrow Aa, a \in V, A \in V_N.$$

(Simbolurile din V_N circulă liber.)

- 3) $A \rightarrow u[A, u, v]$, dacă $\langle u, v \rangle \in C$, $A \rightarrow e(\langle u, v \rangle)D \in P$.

(Simbolul A introduce partea stîngă a unui context $\langle u, v \rangle$ şi simbolul $[A, u, v]$ care va introduce partea dreaptă a contextului.)

- 4) $[A, u, v]a \rightarrow a[A, u, v]$, $a \in V$, $A \in V_N$, $\langle u, v \rangle \in C$,

$$[A, u, v] \rightarrow vD, \text{ dacă } \langle u, v \rangle \in C, A \rightarrow e(\langle u, v \rangle)D \in P.$$

(Simbolul $[A, u, v]$ introduce pe v şi apoi simbolul D pentru a continua derivarea conform limbajului K .)

- 5) $[A, u, v] \rightarrow v$, dacă $\langle u, v \rangle \in C$ şi $A \rightarrow e(\langle u, v \rangle) \in P$.

(Se încheie derivarea atunci cînd se ajunge la sfîrşitul unui şir din limbajul K .)

Egalitatea $L(G') = L(G, K)$ este evidentă. În orice derivare facem cel mult o ştergere cu ajutorul regulilor de tip 5, deci limbajul $L(G')$ este dependent de context şi obţinem $\mathcal{IK} \subseteq \mathcal{L}_1$. Faptul că incluziunea este strictă rezultă din teorema următoare şi din faptul că familia $\mathcal{L}_1$ conţine limbaje $L \subseteq \{a\}^*$ neregulate.

Teorema 7.12. Un limbaj $L \subseteq \{a\}^*$ este regulat dacă şi numai dacă $L \in \mathcal{IK}$.

Demonstraţie. Orice limbaj regulat este în familia $\mathcal{IK}$ (teorema 7.9). Pe vocabularul cu un singur element familiile $\mathcal{IK}$ şi $\mathcal{IK}$ se confundă, deci orice limbaj regulat peste $\{a\}$ este în familia $\mathcal{IK}$.

Invers, fie $G = (\{a\}, B, C)$, $K \subseteq e(B)e(C)^*$ o gramatică contextuală interioară controlată cu $K \in \mathcal{L}_3$. Fie homomorfismul $h: (e(B) \cup e(C))^* \rightarrow \{a\}^*$ definit prin $h(e(x)) = x$, $x \in B$, $h(e(\langle u, v \rangle)) = uv$, $\langle u, v \rangle \in C$. Avem egalitatea evidentă $L(G, K) = h(K)$ deci $L(G, K) \in \mathcal{L}_3$.

Corolar. Orice limbaj din familia $\mathcal{JK}$ este echivalent în litere cu un limbaj regulat.

Oricare ar fi gramatica (G, K) , $G = (V, B, C)$, cu $K \subseteq e(B)e(C)^*$ și h homomorfismul construit în demonstrația anterioară, avem $\psi_r(L(G, K)) = \psi_r(h(K))$ iar $h(K)$ este limbaj regulat.

7.4. Gramatici contextuale condiționale

Gramaticile contextuale (interioare) matriciale, programate și controlate sînt variante ale gramaticilor contextuale simple (interioare) obținute prin modificarea modului de derivare. Gramaticile contextuale (interioare) condiționale sînt variante ale gramaticilor contextuale (interioare) selective. Definiția lor seamănă însă cu cea a gramaticilor Chomsky condiționate, de aceea, le considerăm gramatici contextuale simple (interioare) cu restricții în derivare.

Definiția 7.5. Fie $\mathcal{L}$ o familie oarecare de limbaje. O gramatică $\mathcal{L}$ -condițională este o pereche (G, φ) , $G = (V, B, C)$ fiind o gramatică contextuală simplă iar $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$, $\varphi(\langle u, v \rangle) \in \mathcal{L}$. Pentru $x, y \in V^*$ definim $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $y = uxv$, pentru $\langle u, v \rangle \in C$ astfel încît $x \in \varphi(\langle u, v \rangle)$. (Contextul $\langle u, v \rangle$ se adaugă numai șirurilor din limbajul $\varphi(\langle u, v \rangle)$.) Atunci

$$L(G, \varphi) = \{y \in V^* \mid \text{există } x \in B \text{ astfel încît } x \stackrel{*}{\Rightarrow} y\}.$$

Notăm cu $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ familia limbajelor generate de gramaticile contextuale $\mathcal{L}$ -condiționale.

Definiția 7.6. Fie $\mathcal{L}$ o familie oarecare de limbaje. O gramatică contextuală interioară $\mathcal{L}$ -condițională este o pereche (G, φ) ca în definiția 7.5 cu limbajul generat definit astfel. Pentru $x, y \in V^*$ punem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $x = x_1 x_2 x_3$, $y = x_1 u x_2 v x_3$ pentru $\langle u, v \rangle \in C$ astfel încît $x_2 \in \varphi(\langle u, v \rangle)$. Atunci

$$L(G, \varphi) = \{y \in V^* \mid \text{există } x \in B \text{ astfel încît } x \stackrel{*}{\Rightarrow} y\}.$$

Notăm cu $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ familia limbajelor generate de gramaticile contextuale interioare $\mathcal{L}$ -condiționale.

Gramaticile $\mathcal{L}$ -condiționale pot fi privite ca gramatici contextuale selective cu selecția de un tip particular. O variantă a lor poate fi introdusă în felul următor.

Definiția 7.7. Fie $\mathcal{L}$ o familie oarecare de limbaje. O gramatică contextuală (interioară) $\mathcal{L}$ -selectivă este o gramatică $G = (V, B, C, \varphi)$ pentru care $V^*/\bar{\varphi} \subseteq \mathcal{L}$ ($\bar{\varphi}$ este relația de echivalență din finalul capitolului 6: $x \bar{\varphi} y$ dacă și numai dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$.) Limbajul generat se definește în mod uzual.

Lema 7.1. Dacă familia $\mathcal{L}$ este închisă la reuniune și complementară, atunci definiția 7.7 definește aceleași familii de limbaje ca definițiile 7.5 și 7.6.

Demonstrație. Fie (G, φ) , $G = (V, B, C)$, $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ o gramatică $\mathcal{L}$ -condițională ca în definiția 7.5 sau 7.6. Construim gramatica contextuală (interioară) selectivă $G' = (V, B, C, \varphi')$ unde

$$\varphi'(x) = \{\langle u, v \rangle \in C \mid x \in \varphi(\langle u, v \rangle)\}.$$

Echivalența celor două gramatici se poate verifica în ambele situații privind modul de derivare: interior sau exterior. Pe de altă parte, să observăm că $x\bar{\varphi}'y$ dacă și numai dacă

$$\{\langle u, v \rangle \in C \mid x \in \varphi(\langle u, v \rangle)\} = \{\langle u, v \rangle \in C \mid y \in \varphi(\langle u, v \rangle)\}$$

deci clasele de echivalență în raport cu relația $\bar{\varphi}'$ sînt limbaje din $\varphi(C)$, intersecții de limbaje din $\varphi(C)$ și complementare a unor reuniuni de limbaje din $\varphi(C)$. (Este partiția cea mai puțin fină a limbajului V^* cu proprietatea că orice limbaj din $\varphi(C)$ se poate scrie ca reuniune de clase din partiție.)

Invers, fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică $\mathcal{L}$ -selectivă. Construim gramatica (G', φ') cu $G' = (V, B, C)$ și

$$\varphi'(\langle u, v \rangle) = \{x \in V^* \mid \langle u, v \rangle \in \varphi(x)\}.$$

Din nou egalitatea $L(G) = L(G', \varphi)$ este imediată și avem

$$\varphi'(\langle u, v \rangle) = \cup \hat{x}, \hat{x} \in V^*/\bar{\varphi}, \langle u, v \rangle \in \varphi(x).$$

În continuare vom studia familiile $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ și $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ pentru $\mathcal{L}$ în ierarhia lui Chomsky sau $\mathcal{L} = \mathcal{C}$.

Teorema 7.13. *Au loc incluziunile: $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_3) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_3) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{I}\mathcal{I}$.*

Demonstrație. Incluziunile $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{L}_{i-1})$, $i = 1, 2, 3$, rezultă imediat din definiție, iar incluziunea $\mathcal{C}(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{I}$ rezultă din demonstrația lemei anterioare. În teorema următoare vom arăta că $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$; analog rezultă că $\mathcal{C}(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{L}_0$ și astfel obținem că $\mathcal{C}(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{I}$ este incluziune strictă.

Dacă $G = (V, B, C)$ este o gramatică contextuală simplă, atunci (G, φ) cu $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ definită prin $\varphi(\langle u, v \rangle) = V^*$ este echivalentă cu G , deci $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{L}_3)$. Incluziunea este strictă deoarece limbajul $M = \{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$ nu este în $\mathcal{C}$ dar poate fi generat cu gramatica (G, φ) cu $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle\})$ și $\varphi(\langle a, \lambda \rangle) = \{a\}^*$, $\varphi(\langle b, \lambda \rangle) = \{b\}^*$.

Fie acum limbajul $L_0 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ și fie $L = \{a, b\}^* \cup \{c\} L_0 \{c\}$. Limbajul L este în familia $\mathcal{C}(\mathcal{L}_2)$ deoarece este generat de gramatica contextuală $\mathcal{L}_2$ -condițională (G, φ) cu

$$G = (\{a, b, c\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle, \langle c, c \rangle\})$$

$$\varphi(\langle \lambda, a \rangle) = \varphi(\langle \lambda, b \rangle) = \{a, b\}^*,$$

$$\varphi(\langle c, c \rangle) = L_0.$$

Să presupunem că există o gramatică contextuală $\mathcal{L}_3$ -condițională care generează limbajul L , $G = (\{a, b, c\}, B, C)$, $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}(\{a, b, c\}^*)$, $\varphi(\langle u, v \rangle) \in \mathcal{L}_2$. În C trebuie să existe cel puțin un context $\langle u, v \rangle$, $u = ca^i$, $v = b^j c$, $i, j \geq 0$, astfel încît $\varphi(\langle u, v \rangle) \cap L$ este infinit. Limbajul $\varphi(\langle u, v \rangle) \cap \{a\}^* \{b\}^*$ este regulat infinit. Orice șir din acest limbaj poate fi derivat cu contextul $\langle u, v \rangle$, deci este de forma $a^{n-i} b^{n-j}$. Un limbaj infinit format din asemenea șiruri nu poate fi regulat. Contradicție. Limbajul L nu poate fi deci în familia $\mathcal{C}(\mathcal{L}_3)$ și incluziunea $\mathcal{C}(\mathcal{L}_3) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_2)$ este strictă.

Să considerăm și limbajul $L_0 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ și fie $L = \{a, b, c, d\}^* \cup \{d\}L_0\{d\}$. Limbajul L este în familia $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1)$ deoarece este generat de gramatica contextuală $\mathcal{L}_1$ -condițională (G, φ) cu

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, x \rangle \mid x \in \{a, b, c\}\} \cup \{\langle d, d \rangle\}),$$

$$\varphi(\langle \lambda, a \rangle) = \varphi(\langle \lambda, b \rangle) = \varphi(\langle \lambda, c \rangle) = \{a, b, c\}^*,$$

$$\varphi(\langle d, d \rangle) = L_0.$$

Să presupunem că există o gramatică contextuală $\mathcal{L}_2$ -condițională care generează limbajul L , $G = (\{a, b, c, d\}, B, C)$, $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}^*)$, $\varphi(\langle u, v \rangle) \in \mathcal{L}_2$. În C trebuie să existe cel puțin un context $\langle u, v \rangle$, $u = da^i$, $v = c^j d$, $i, j \geq 0$, astfel încât $\varphi(\langle u, v \rangle) \cap L$ este infinit. Limbajul $\varphi(\langle u, v \rangle) \cap \{a\}^* \{b\}^* \{c\}^*$ este independent de context infinit. Contextul $\langle u, v \rangle$ se adaugă la orice șir din acest limbaj deci toate șirurile din el trebuie să fie de forma $a^n b^n c^n$, $n \geq 1$. Un limbaj infinit format din asemenea șiruri nu este independent de context. Contradicție. Limbajul L nu poate fi în familia $\mathcal{C}(\mathcal{L}_2)$, deci incluziunea $\mathcal{C}(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_1)$ este strictă.

Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj recursiv enumerabil care nu este în $\mathcal{L}_1$. Construim o gramatică contextuală $\mathcal{L}_0$ -condițională asemănătoare celei din demonstrația teoremei 3.10. Fie c un simbol în afara lui V și

$$G = (V \cup \{c\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\} \cup \{\langle \lambda, c \rangle\}),$$

$$\varphi(\langle \lambda, a \rangle) = V^*, a \in V,$$

$$\varphi(\langle \lambda, c \rangle) = L.$$

Evident, $L(G, \varphi) = V^* \cup L\{c\}$. Deoarece familia $\mathcal{L}_1$ este închisă la intersecție și la homomorfisme cu ștergere limitată, rezultă că $L(G, \varphi) \notin \mathcal{L}_1$, deci $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_0)$ este incluziune strictă.

Toate afirmațiile anterioare — cu excepția faptului că incluziunile $\mathcal{I}(\mathcal{L}_3) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{L}_2) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{L}_1)$ sînt stricte — pot fi demonstrate în mod similar pentru familiile de limbaie interioare condiționale. (Limbajul M anterior este în $\mathcal{I}(\mathcal{L}_3)$ — $\mathcal{I}$ iar demonstrația teoremei 3.10 poate fi urmată și pentru a arăta că $\mathcal{I}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_0)$.)

Pentru a arăta că $\mathcal{I}(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_1)$ este incluziune strictă, procedăm astfel. Fie gramatica contextuală interioară $\mathcal{L}_1$ -condițională (G, φ) cu

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{db\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle c, c \rangle\}),$$

$$\varphi(\langle \lambda, a \rangle) = \{d\} \cup \{da^i b \mid i \geq 0\},$$

$$\varphi(\langle c, c \rangle) = \{a^i b a^j \mid i, j \geq 0, i + j = 2^n, \text{ pentru } n \geq 1\}.$$

Evident, avem $L(G, \varphi) = \{da^i b a^j \mid i, j \geq 0\} \cup \{da^j c a^{k_1} c a^{k_2} \dots c a^{k_r} b a^{s_r} c \dots c a^{s_2} c a^{s_1} a^t \mid j, t \geq 0, k_u, s_u \geq 0 \text{ pentru toți } u, r \geq 1 \text{ și } \sum_{u=1}^r k_u + \sum_{u=1}^r s_u = 2^p \text{ pentru } p \geq 1, u = 1, 2, \dots, r\}$.

Limbajul $L(G, \varphi)$ nu este în familia $\mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$. Într-adevăr, fie $G' = (\{a, b, c, d\}, B, C)$, $\varphi' : C \rightarrow \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}^*)$ o gramatică contextuală interioară $\mathcal{L}_2$ -condițională care generează acest limbaj. Deoarece în limbajul $L(G, \varphi)$ există o infinitate de șiruri de forma $dca^i ba^j c$, $i + j = 2^n$, $n \geq 1$, rezultă că aceste șiruri sînt derivate folosind contexte în C . Dacă se folosește contextul $\langle u, v \rangle$ cu u și v conținînd cîte o apariție a simbolului c , atunci $\varphi(\langle u, v \rangle) \cap \{a^n b a^m \mid n, m \geq 0\}$ trebuie să fie limbaj independent de context infinit. Acest limbaj nu poate conține decît șiruri $a^i b a^j$ astfel încît $i + N(a, u) + j + N(a, v) = 2^n$. Limbajul respectiv nu poate fi independent de context. Contradicție. Simbolurile c trebuie deci introduse de la început printr-un șir din B . Acest șir este deci de forma $z = dca^r ba^s c$, $r + s = 2^n$, $n \geq 1$. Contextele care se pot aplica acestui șir sînt de forma $\langle a^i, a^j \rangle$, $i, j \geq 0$. Oricare ar fi descompunerea $z = z_1 z_2 z_3$ cu $z_2 \in \varphi(\langle a^i, a^j \rangle)$, rezultă că $z_1 (a^i)^r z_2 (a^j)^s z_3$, $r \geq 1$, este un șir din limbajul $L(G', \varphi')$. Aceste șiruri conțin aparițiile simbolului c în z_1 și în z_3 deci sînt de forma $dca^t ba^s c$, $t + s = 2^n$, $n \geq 1$. Acest lucru este imposibil, deci gramatica (G', φ') nu poate genera limbajul $L(G, \varphi)$ și $L(G, \varphi) \notin \mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$.

Teorema 7.14. *Avem incluziunile stricte $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{L}_i$, $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{L}_i$, $i = 0, 1$.*

Demonstrație. Fie (G, φ) cu $G = (V, B, C)$, $\varphi : C \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$, $\varphi(\langle u, v \rangle) \in \mathcal{L}_1$ o gramatică $\mathcal{L}_1$ -condițională. Presupunem că $C = \{\langle u_i, v_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ și fie $L_i = \varphi(\langle u_i, v_i \rangle)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Fie și gramaticile de tip 1 $G_i = (V_N^{(i)}, V, S^{(i)}, P^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, k$, astfel încît $L_i = L(G_i)$. Presupunem vocabularele $V_N^{(i)}$ mutual disjuncte și construim următoarea gramatică: $G' = (V_N, V, S, \bar{P})$ cu

$$V_N = V \times (W \cup \{b\}) \cup \{S, A, X, Y\} \cup \{Y_i \mid i = 1, 2, \dots, k\} \cup$$

$$\cup \{U_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}, \text{ unde } W = \bigcup_{i=1}^n V_N^{(i)} \cup V,$$

iar mulțimea P conține următoarele grupe de reguli:

1) $S \rightarrow AX(a_1, b) \dots (a_r, b)A$, pentru orice $a_1 \dots a_r \in B$.
(Se începe derivarea introducînd un cuvînt din B între marcatorii A , pe prima componentă a unor simboluri-perechi.)

2) $X(a, b) \rightarrow Y_i(a, S^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, k$.
(Pe a doua componentă a simbolurilor-perechi se începe o derivare într-o gramatică G_i oarecare.)

3) $(a_1, b)(a_2, z) \rightarrow (a_1, z)(a_2, b)$,

$$(a_1, z)(a_2, b) \rightarrow (a_1, b)(a_2, z), a \in V, z \in W.$$

(Simbolul „spațiu”, b , se mișcă liber.)

4) $(a_1, b) \dots (a_r, b)(a_{r+1}, z_1) \dots (a_{r+t}, z_t) \rightarrow (a_1, z'_1) \dots (a_{r+t}, z'_{r+t})$, pentru $z_1 z_2 \dots z_t \rightarrow z'_1 \dots z'_{r+t}$ din $P^{(i)}$, $a_j \in V$.
(Se derivează pe componentele secunde ale șirului curent ca în gramatica G_i .)

5) $Y_i(a, a) \rightarrow (a, a)Y_i$, $a \in V$, $i = 1, 2, \dots, k$.
(Simbolul Y_i testează dacă derivarea în raport cu gramatica G_i s-a terminat și a condus la șirul de pe prima componentă a simbolurilor-perechi.)

6) $Y_i A \rightarrow U_i(a_1, b) \dots (a_v, b)A$, pentru $\langle u_i, v_i \rangle \in C$ cu $v_i = a_1 a_2 \dots$
 $\dots a_v$, $a_j \in V$.

(Dacă șirul simbolurilor de pe primele componente ale șirului curent este în $\varphi(\langle u_i, v_i \rangle)$, atunci se adaugă v_i la dreapta, iar simbolul U_i va introduce șirul u_i la stînga, reintroducînd apoi simbolul intermediar X .)

$$7) (a, a) U_i \rightarrow U_i(a, b), a \in V, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$AU_i \rightarrow AX(a_1, b) \dots (a_r, b), \text{ pentru } u_i = a_1 a_2 \dots a_r.$$

$$8) AX \rightarrow Y,$$

$$Y(a, b) \rightarrow aY, a \in V,$$

$$YA \rightarrow \lambda.$$

(Derivarea se poate încheia numai dacă șirul curent este format din simboluri în $V \times \{b\}$.)

Se vede ușor că $L(G') = L(G, \varphi)$. Deoarece gramatica G' are spațiul de lucru mărginit (în orice derivare se fac trei ștergeri), rezultă că $L(G') \in \mathcal{L}_1$ deci avem $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1) \subseteq \mathcal{L}_1$.

Deoarece $\mathcal{C}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{S}$ pentru orice familie $\mathcal{L}$ și există limbaje regulate în afara lui $\mathcal{S}$, rezultă că incluziunea $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ este strictă.

Demonstrația anterioară poate fi repetată aproape întocmai pentru gramaticile interioare $\mathcal{L}_1$ -condiționale, cu precauția de a face derivări interioare (marcatorii A se plasează în interiorul șirului curent). Teorema este adevărată și pentru asemenea gramatici. Pentru $i = 0$ demonstrația este identică.

Teorema 7.15. Toate perechile $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$, $\mathcal{L} = \mathcal{C}(\mathcal{L}_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\mathcal{L}' \in \{\mathcal{L}_3, \mathcal{G}\}$ și toate perechile $(\mathcal{I}(\mathcal{L}_i), \mathcal{G})$, $i = 0, 1, 2, 3$, sînt incomparabile; $\mathcal{I}(\mathcal{L}_3) - \mathcal{L}_3$ este nevidă.

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{S}$ pentru orice i și $\mathcal{L}_3 - \mathcal{S} \neq \emptyset$ (teorema 3.6) și $\mathcal{G} - \mathcal{S} \neq \emptyset$ (teorema 3.3), rezultă că avem $\mathcal{L}' - \mathcal{L} \neq \emptyset$ pentru orice $\mathcal{L}$ și $\mathcal{L}'$ ca mai sus.

Invers, limbajul $L = \{a^n cb^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n ca^n \mid n \geq 0\}$ este în familia $\mathcal{C}(\mathcal{L}_3)$ deoarece poate fi generat cu gramatica (G, φ) cu

$$G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}),$$

$$\varphi(\langle a, b \rangle) = \{a^n cb^m \mid n, m \geq 0\},$$

$$\varphi(\langle b, a \rangle) = \{b^n ca^m \mid n, m \geq 0\}.$$

Acest limbaj nu este însă regulat și nici în familia $\mathcal{G}$ (teorema 7.7).

Deoarece $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{I}\mathcal{S}$ pentru orice i și $\mathcal{G} - \mathcal{I}\mathcal{S} = \emptyset$ (teorema 3.4), rezultă că $\mathcal{G} - \mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \neq \emptyset$ pentru orice i . Limbajul L anterior poate fi generat și cu gramatica contextuală interioară $\mathcal{L}_3$ -condițională (G', φ') cu

$$G' = (\{a, b, c\}, \{c, acb, bca\}, \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}),$$

$$\varphi(\langle a, b \rangle) = \{acb\},$$

$$\varphi(\langle b, a \rangle) = \{bca\},$$

deci avem $\mathcal{I}(\mathcal{L}_3) - \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Deoarece $\mathcal{I} - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$ (teorema 3.7) și $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_3)$ rezultă că $\mathcal{I}(\mathcal{L}_3) - \mathcal{L}_3 \neq \emptyset$.

Observația 7.1. Deoarece $\mathcal{CM} = \mathcal{C}$, relația dintre $\mathcal{CM}$ și $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i)$ nu necesită investigații. Deoarece $\mathcal{IM} - \mathcal{I} \neq \emptyset$ (teorema 7.2) dar $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{I}\mathcal{I}$ (teorema 7.13) rezultă că $\mathcal{IM} - \mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \neq \emptyset$. De asemenea, $\mathcal{I}(\mathcal{L}_0) - \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$ (teorema 7.13) și $\mathcal{IM} \subset \mathcal{L}_1$ (teorema 7.3), deci $\mathcal{I}(\mathcal{L}_0)$ și $\mathcal{IM}$ sînt incomparabile. Alte cîteva asemenea relații legînd familiile $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i)$ și $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i)$ de familiile $\mathcal{CM}$, $\mathcal{CP}$, $\mathcal{CK}$ și $\mathcal{IM}$, $\mathcal{IP}$, $\mathcal{IK}$ pot fi deduse pe baza rezultatelor din secțiunile 7.1, 7.2, 7.3 (deoarece $\mathcal{CK} = \mathcal{L}_{un}$ rezultă că $\mathcal{CK}$ este incomparabilă cu $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i)$, $i = 0, 1, 2$, deoarece $\mathcal{CP} \subset \mathcal{L}_{un}$ rezultă că $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i)$, $i = 0, 1, 2$, conțin limbaje în afara familiei $\mathcal{CP}$ etc.). Precizarea mai exactă a relațiilor dintre familiile $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i)$, $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i)$ și celelalte familii de limbaje obținute prin impunerea de restricții în derivare gramaticilor contextuale rămîne o *problemă deschisă* (P11). De asemenea, rămîne deschisă problema dacă incluziunea $\mathcal{I}(\mathcal{L}_3) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$ din teorema 7.13 este sau nu strictă (*problema* P12). Credem că este adevărată și incluziunea $\mathcal{C}(\mathcal{L}_3) \subset \mathcal{L}_2$ (*problema* P13). O altă problemă deschisă se referă la relațiile dintre familiile de limbaje obținute prin impunerea de restricții în derivare gramaticilor Chomsky și gramaticilor contextuale (*problema* P14). (Pentru $\mathcal{CM}$, $\mathcal{CP}$, $\mathcal{CK}$ problema este rezolvată de rezultatele din secțiunile 7.1, 7.2, 7.3, dar pentru alte familii problema rămîne a fi investigată.)

Teorema 7.16. Dacă $\mathcal{L}$ este o familie de limbaje închisă la derivata stîngă și dreaptă, atunci $\mathcal{L} \cap \mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{L})$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă astfel încît $L(G) \in \mathcal{L}$. Construim următoarea gramatică $\mathcal{L}$ -condițională: $G' = (V, B, C)$, $\varphi'(\langle u, v \rangle) = \partial_u(\partial_v^a(L(G)))$, $\langle u, v \rangle \in C$. Deoarece familia $\mathcal{L}$ este închisă la operațiile ∂ și ∂^a , rezultă că $\varphi'(\langle u, v \rangle) \in \mathcal{L}$. Avem egalitatea $L(G) = L(G', \varphi')$. Într-adevăr, un context $\langle u, v \rangle$ se adaugă unui șir $x \in V^*$ dacă și numai dacă $uxv \in L(G)$, deci funcția φ asigură egalitatea dorită.

Corolar. $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{I} = \mathcal{C}(\mathcal{L}_0)$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{I} = \mathcal{C}(\mathcal{L}_1)$, $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{I} \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_2)$, $\mathcal{L}_3 \cap \mathcal{I} \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_3)$.

Într-adevăr, toate familiile $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, sînt închise la derivata stîngă și dreaptă, $\mathcal{C}(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{L}_0$, $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1) \cup \mathcal{L}_1$ (teorema 7.14), dar $\mathcal{C}(\mathcal{L}_3) - \mathcal{L}_3 \neq \emptyset$ (teorema 7.15) și $\mathcal{C}(\mathcal{L}_2) - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$. Ultima afirmație este demonstrată de următorul limbaj:

$$L = \{a^n b^n c^m \mid n \geq m \geq 0\}.$$

Acest limbaj nu este în familia $\mathcal{L}_2$ (se folosește lema lui Ogden pentru a arăta acest lucru), dar este generat cu gramatica $\mathcal{L}_2$ -condițională

$$G = (\{a, b, c\}, \{\lambda\}, \{\langle a, b \rangle, \langle \lambda, c \rangle\}),$$

$$\varphi(\langle a, b \rangle) = \{a^i b^i \mid i \geq 0\},$$

$$\varphi(\langle \lambda, c \rangle) = \{a^i b^j c^k \mid i, j \geq 1, k \geq 0, k < j\}.$$

Egalitatea $L = L(G, \varphi)$ este imediată.

A mai rămas de investigat cazul în care condiționarea folosirii contextelor nu se face în raport cu un limbaj dintr-o familie Chomsky, ci dintr-o familie de limbaje contextuale. Ne vom interesa numai de familiile $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ și $\mathcal{I}(\mathcal{I})$.

Teorema 7.17. *Avem următoarele relații:* 1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(\mathcal{C})$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}(\mathcal{I})$,
2) $\mathcal{C}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$, $\mathcal{I}(\mathcal{I}) - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$, 3) $\mathcal{C}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_1$, $\mathcal{I}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{L}_1$.

Demonstrație. Faptul că $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{C})$, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{I})$ este imediat (punem $\varphi(\langle u, v \rangle) = V^*$; limbajul V^* este în $\mathcal{C} \cap \mathcal{I}$). Pe de altă parte, limbajul $L = \{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$ nu este în $\mathcal{C} \cup \mathcal{I}$ (teorema 3.2) dar este în $\mathcal{C}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{I}(\mathcal{I})$. Într-adevăr, fie gramatica (G, φ) cu $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\})$, $\varphi(\langle \lambda, a \rangle) = \{a\}^*$, $\varphi(\langle \lambda, b \rangle) = \{b\}^*$. Evident, $L_m(G, \varphi) = L_i(G, \varphi) = L$. Am obținut punctul 1) al teoremei.

Punctul 3) rezultă din faptul că $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_2$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{L}_1$ (teorema 3.5, respectiv, teorema 3.9) și din $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$, $\mathcal{I}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ (teorema 7.14).

Pentru a demonstra punctul 2) considerăm următoarea gramatică $\mathcal{C}$ -condițională:

$$G = (\{a, b, c\}, \{\lambda\}, \{\langle a, b \rangle, \langle \lambda, c \rangle\}).$$

$$\varphi(\langle a, b \rangle) = \{a^i b^i \mid i \geq 0\},$$

$$\varphi(\langle \lambda, c \rangle) = \text{Shuf}(\{a\}^*, \{b^j c^k \mid 0 \leq k < j\}).$$

Această gramatică lucrează exact ca gramatica G din corolarul teoremei 7.16 și generează limbajul neindependent de context $L = \{a^n b^n c^m \mid n \geq m \geq 0\}$. Limbajul $\varphi(\langle a, b \rangle)$ este evident în $\mathcal{C}$, iar $\varphi(\langle \lambda, c \rangle)$ poate fi generat cu următoarea gramatică contextuală simplă: $G' = (\{a, b, c\}, \{b\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle, \langle b, c \rangle\})$. În concluzie, $L \in \mathcal{C}(\mathcal{C})$ și demonstrația este completă. ($\mathcal{I}(\mathcal{I}) - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$ deoarece $\mathcal{I} - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$.)

Indicații bibliografice. Pentru gramaticile contextuale simple, restricția matricială, programarea și controlul regulat au fost introduse și studiate în [70]. Pentru gramaticile interioare acest lucru se face pentru prima dată aici. Gramaticile condiționale în forma din definiția 7.7 au fost introduse în [31], unde se studiază gramaticile $\mathcal{L}_3$ -condiționale și se arată că limbajul asociat descompunerii unui număr algebric de ordin 2 în fracție continuă este egal cu intersecția dintre un limbaj contextual $\mathcal{L}_3$ -condițional și un limbaj regulat. Gramaticile $\mathcal{L}_i$ -condiționale și $\mathcal{C}$ -condiționale în sensul din [31] sînt apoi studiate în [71]. În [83] se consideră gramatici interioare $\mathcal{L}_i$ -condiționale în sensul definiției 7.7. Pentru gramaticile $\mathcal{L}_i$ -condiționale în sensul definiției 7.7 s-au obținut rezultate întru totul similare celor din secțiunea 7.4, cu excepția teoremei 7.16 care poate fi demonstrată pe această cale numai pentru familii $\mathcal{L}$ închise la complementară. Faptul că incluziunile $\mathcal{C}(\mathcal{L}_3) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{C}(\mathcal{L}_1)$ și $\mathcal{I}(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_1)$ sînt stricte este demonstrat în [82].

VARIANTE ALE GRAMATICILOR CONTEXTUALE

8.1. Gramatici v -contextuale

În gramaticile contextuale considerate pînă acum, derivările se puteau opri la fiecare pas prin producerea unui șir corect. Eliminarea acestei posibilități conduce la noțiunea de gramatică v -contextuală, așa cum a fost introdusă în [58].

Definiția 8.1. O gramatică v -contextuală este un 5-uplu $G = (V, B, C, \varphi, \psi)$ unde V, B, C, φ sînt ca într-o gramatică contextuală selectivă iar $\psi: V \rightarrow \mathcal{P}(C)$ astfel încît $\psi(x) \subseteq \varphi(x)$ pentru orice $x \in V^*$. Limbajul generat de gramatica G este

$$L(G) = \{u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B, \langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(x), \langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(u_{i-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{i-1}), 2 \leq i \leq n, \langle u_n, v_n \rangle \in \psi(u_{n-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_{n-1})\}.$$

Derivările se desfășoară ca într-o gramatică contextuală selectivă, dar nu se pot termina decît prin adăugarea unui context $\langle u, v \rangle \in \psi(x)$. Să observăm că șirurile din B nu mai sînt neapărat în $L(G)$; trebuie ca $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \psi(x)$, pentru ca $x \in L(G)$ pentru un șir $x \in B$. Marea generalitate a funcțiilor φ, ψ face ca puterea generativă a gramaticilor v -contextuale să fie extremă.

Teorema 8.1. Orice limbaj este v -contextual.

Demonstrație. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj oarecare. Construim gramatica v -contextuală

$$G = (V, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\} \cup \{\langle \lambda, \lambda \rangle\}, \varphi, \psi)$$

unde

$$\varphi(x) = \{\langle \lambda, a \rangle \mid a \in V\} \cup \{\langle \lambda, \lambda \rangle\}, \quad x \in V^*,$$

$$\psi(x) = \{\langle \lambda, \lambda \rangle\} \text{ pentru } x \in L,$$

$$\psi(x) = \emptyset \text{ pentru } x \notin L.$$

O derivare în raport cu gramatica G se termină dacă și numai dacă ea produce un șir $x \in V^*$ pentru care $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \psi(x)$, deci dacă și numai dacă $x \in L$. Egalitatea $L(G) = L$ este evidentă.

Se impune deci particularizarea funcțiilor φ și ψ pentru a obține rezultate semnificative.

Definiția 8.2. O gramatică v -contextuală simplă este un quadruplu $G = (V, B, C, T)$, unde (V, B, C) este o gramatică contextuală simplă iar $T \subseteq C$ este mulțimea contextelor terminale. Limbajul generat de gramatica G este

$$L(G) = \{u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \mid n \geq 1, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, \langle u_n, v_n \rangle \in T\}.$$

Vom nota cu $\mathcal{C}_v$ familia limbajelor v -contextuale simple.

Teorema 8.2. 1) Familia $\mathcal{C}_v$ include strict pe $\mathcal{C}$ și conține limbaje care nu sînt în $\mathcal{P}$. 2) Orice limbaj din familia $\mathcal{C}_v$ este 2-liniar (are $\text{Var}(L) \leq 2$).

Demonstrație. Dacă $G = (V, B, C)$ este o gramatică contextuală simplă, atunci ea este echivalentă cu gramatica v -contextuală simplă $G = (V, B, C, C)$. Fie și gramatica v -contextuală simplă

$$G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle, \langle b, b \rangle\}, \{\langle b, b \rangle\}).$$

Avem egalitatea $L(G) = \{bxb \mid x \in \{a, b\}^*\}$. Deoarece $K_0(L(G))$ include toate șirurile de forma $ba^i b$, $i \geq 0$, rezultă că $L(G) \notin \mathcal{P}$ și punctul 1) este demonstrat.

Dacă $G = (V, B, C, T)$ este o gramatică v -contextuală simplă, atunci construim gramatica liniară $G' = (V_N, V, S, P)$ cu $V_N = \{S, R\}$ și cu

$$P = \{S \rightarrow uRv \mid \langle u, v \rangle \in T\} \cup \{R \rightarrow uRv \mid \langle u, v \rangle \in C\} \cup \{R \rightarrow x \mid x \in B\}.$$

Egalitatea $L(G') = L(G)$ este evidentă și demonstrația este completă.

Să adăugăm contexte terminale gramaticilor cu restricții în derivare. Ca în demonstrația teoremei 7.1, se poate vedea că gramaticile v -contextuale matriciale vor genera exact limbajele din familia $\mathcal{C}_v$. Fie $\mathcal{CP}_v$, $\mathcal{CK}_v$ familiile limbajelor generate de gramaticile v -contextuale programate, respectiv, controlate (cu limbaje de control regulate).

Teorema 8.3. Avem relațiile $\mathcal{CP}_v \subseteq \mathcal{CK}_v = \mathcal{L}_{lin}$.

Demonstrație. Fie (G, ψ) , $G = (V, B, C, T)$, $\psi: B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$, o gramatică v -contextuală programată. Construim limbajul

$$R = \{e(x)e(\langle u, v \rangle) \mid x \in B, \langle u, v \rangle \in \psi(x)\} \cup$$

$$\cup \{e(\langle u, v \rangle) e(\langle u', v' \rangle) \mid \langle u, v \rangle \in C, \langle u', v' \rangle \in \psi(\langle u, v \rangle)\}.$$

(ca în demonstrația teoremei 7.10). Gramatica v -contextuală controlată $(G, D(e(B), R))$ generează limbajul $L(G, \psi)$, deci $\mathcal{CP}_v \subseteq \mathcal{CK}_v$.

Fie și gramatica v -contextuală controlată (G, K) , $G = (V, B, C, T)$, $K \subseteq e(B)e(C)^*$. Considerăm limbajul $K' = K \cap e(B)e(C)^* e(T)$. Avem egalitatea $L(G, K) = L(G', K')$, unde $G' = (V, B, C)$. Într-adevăr, orice derivare în raport cu (G', K') se termină corect în raport cu T deoarece orice șir din K' se termină cu o etichetă a unui context din T . Rezultă că $\mathcal{CK}_v \subseteq \mathcal{CK}$; deoarece $\mathcal{CK} = \mathcal{L}_{lin}$ (teorema 7.9), avem $\mathcal{CK}_v \subseteq \mathcal{L}_{lin}$. Incluziunea $\mathcal{CK} \subseteq \mathcal{CK}_v$ este imediată (luăm $T = C$).

Nu știm dacă incluziunea $\mathcal{CP}_v \subseteq \mathcal{L}_{lin}$ este strictă sau nu (problema P15). Este însă adevărat următorul rezultat.

Teorema 8.4. Orice limbaj liniar este imaginea homomorfică a unui limbaj din familia $\mathcal{CP}_v$.

Demonstrație. Fie $G = (V_N, V_T, S, P)$ o gramatică liniară. Construim următoarea gramatică v -contextuală programată: $G' = (V, B, C, T)$ cu

$$V = V_T \cup (V_T \cup \{c\}) \times V_N, c \text{ simbol nou},$$

$$B = \{x \mid x \in V_T^*, A \rightarrow x \in P\},$$

$C = \{\langle u(a, A), v \rangle \mid u, v \in V_T^*, a \in V_T, \text{ există o regulă } D \rightarrow uaAv \text{ în } P \text{ sau } u = \lambda, v \in V_T^*, a = c \text{ și există regula } D \rightarrow Av \text{ în } P\}.$

$T = \{\langle u(a, A), v \rangle \mid u, v \in V_T^*, a \in V_T, \text{ există regula } S \rightarrow uaAv \text{ în } P \text{ sau } u = \lambda, v \in V_T^*, a = c \text{ și există regula } S \rightarrow Av \text{ în } P\}.$

Dacă există reguli $S \rightarrow x$ în P cu $x \in V_T^*$, atunci adăugăm la mulțimea T și contextul $\langle \lambda, \lambda \rangle$. Definim o funcție $\psi: B \cup C \rightarrow \mathcal{P}(C)$ astfel:

$\psi(x) = \{\langle u(a, A), v \rangle \mid \text{ există regulile } D \rightarrow uaAv, A \rightarrow x \text{ în } P \text{ cu } u, v, x \in V_T^*, a \in V_T \text{ sau } D \rightarrow Av, A \rightarrow x, v, x \in V_T^*, \text{ caz în care } a = c\}, x \in B,$

$\psi(\langle u(a, D), v \rangle) = \{\langle u'(a', A), v' \rangle \mid \text{ există regulile } E \rightarrow u'a'Av', A \rightarrow \rightarrow uaDv \text{ în } P \text{ cu } u, v \in V_T^*, a, a' \in V_T, \text{ eventual } E \rightarrow Av' \text{ sau } A \rightarrow Dv, \text{ cu } v, v' \text{ în } V_T^*, \text{ caz în care } a = c, \text{ respectiv } a' = c\}, \langle u(a, D), v \rangle \in C.$

Obținem egalitatea $L(G) = h(L(G', \psi))$ unde $h: V^* \rightarrow V_T^*$ este homomorfismul definit prin $h(a) = a, a \in V_T, h((c, A)) = \lambda, A \in V_N, h((a, A)) = a, a \in V_T, A \in V_N.$

Într-adevăr, fie $x \in L(G)$ obținut printr-o derivare $S \Rightarrow u_1 A_1 v_1 \Rightarrow \Rightarrow u_1 u_2 A_2 v_2 v_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 \dots u_n A_n v_n \dots v_1 \Rightarrow u_1 \dots u_n z v_n \dots v_1 = x$. Rezultă că $\langle u'_1(a_1, A_1), v_1 \rangle \in T, u_1 = u'_1 a_1$ sau $u_1 = \lambda, a_1 = c, z \in B, \langle u'_1(a_1, A_1), v_1 \rangle \in \psi(\langle u'_2(a_2, A_2), v_2 \rangle), \dots, \langle u'_n(a_n, A_n), v_n \rangle \in \psi(z)$, deci putem face derivarea $z \Rightarrow u'_n(a_n, A_n) z v_n \Rightarrow \dots \Rightarrow u'_1(a_1, A_1) \dots u'_n(a_n, A_n) z v_n \dots v_1 = w$. Evident, $h(w) = x$, deci $x \in h(L(G', \psi))$.

Invers, orice derivare în raport cu gramatica (G', ψ) corespunde unei derivări în gramatica G (funcția ψ urmărește neterminalii derivării în G), astfel încât dacă derivarea în (G', ψ) produce un șir w , atunci derivarea în G produce șirul $h(w)$.

Corolar. $\mathcal{CP}_v - \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Familia $\mathcal{S}$ este închisă la homomorfisme (corolarul teoremei 4.2), dar nu conține toate limbajele liniare (teorema 3.6). Dacă $\mathcal{CP}_v \subseteq \mathcal{S}$, atunci ar rezulta că $\mathcal{L}_{un} \subseteq \mathcal{S}$, ceea ce este imposibil.

Deoarece familia $\mathcal{C}_v$ conține limbaje care nu sînt în $\mathcal{S}$, rezultă că adăugarea de contexte terminale mărește și puterea generativă a gramaticilor contextuale condiționale. Rămîne deschisă problema investigării mai în detaliu a gramaticilor v -contextuale condiționale și a gramaticilor v -contextuale interioare (problema P16).

În [58] se formulează problema caracterizării acelor gramatici v -contextuale (selective) care generează exact familia limbajelor liniare. Un răspuns la această problemă este următorul.

Teorema 8.5. Gramaticile v -contextuale cu limbajul lui Szilard regulat generează exact familia limbajelor liniare.

Demonstrație. (Limbajul lui Szilard asociat unei gramatici G este mulțimea tuturor cuvintelor de control asociate tuturor derivărilor în gramatica G ; notăm acest limbaj cu $Sz(G)$.)

Dacă $G = (V, B, C, \varphi, \psi)$ este o gramatică v -contextuală cu $Sz(G) \in \mathcal{L}_3$, atunci gramatica controlată $(G', Sz(G))$, $G' = (V, B, C)$, generează

limbajul $L(G)$. Într-adevăr, dacă $x \in L(G)$, atunci există o derivare a lui z în raport cu gramatica G ; cuvîntul de control asociat acestei derivări este în limbajul $Sz(G)$ și el identifică complet derivarea. Rezultă că derivarea este corectă în raport cu $(G', Sz(G))$, deci $z \in L(G', Sz(G))$. Invers, orice derivare în raport cu gramatica $(G', Sz(G))$ este corectă în raport cu G , deci produce un șir din $L(G)$. Conform teoremei 8.3, rezultă că $L(G) \in \mathcal{L}_{lin}$.

Fie acum o gramatică liniară $G = (V_N, V, S, P)$. Construim gramatica v -contextuală $G' = (V, B, C, \varphi, \psi)$ astfel:

$$B = \{x \in V^* \mid \text{există } A \rightarrow x \text{ în } P\},$$

$$C = \bigcup_{A \in V_N} \Phi(A), \text{ unde } \Phi(A) = \{\langle u, v \rangle \mid \text{există o regulă } D \rightarrow uAv \text{ în } P\},$$

$$\varphi(x) = \bigcup_{x \in N(A)} \Phi(A), \text{ unde } N(A) = \{w \in V^* \mid A \xrightarrow{*} w\},$$

$$\psi(x) = \bigcup_{x \in N(A)} \Psi(A), \text{ unde } \Psi(A) = \{\langle u, v \rangle \mid \text{există o regulă } S \rightarrow uAv \text{ în } P\}.$$

În [58], pag. 314 — 315, se demonstrează că este adevărată egalitatea $L(G) = L(G')$. Este deci suficient să arătăm că $Sz(G') \in \mathcal{L}_3$.

Pentru aceasta considerăm gramatica regulată $G'' = (V_N, e(B) \cup e(C), S, P')$, cu $P' = \{A \rightarrow e(x) \mid \text{există o regulă } A \rightarrow x, x \in V^*, \text{ în } P\} \cup \{A \rightarrow De(\langle u, v \rangle) \mid \text{există o regulă } A \rightarrow uDv \text{ în } P\}$.

Fie $z \in Sz(G')$, $z = wc_1c_2 \dots c_n$. Există deci o derivare în raport cu gramatica G' caracterizată de $x \in B$, $\langle u_i, v_i \rangle \in C$, $i = 1, 2, \dots, n$ astfel încît $w = e(x)$, $c_i = e(\langle u_i, v_i \rangle)$ și avem $x \Rightarrow u_1xv_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n \dots u_1xv_1 \dots v_n$ în raport cu gramatica G' . Conform definițiilor funcțiilor φ și ψ , rezultă că trebuie să existe o derivare în G de forma $S \Rightarrow u_nA_nv_n \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n \dots u_1A_1v_1 \dots v_n \Rightarrow u_n \dots u_1xv_1 \dots v_n$. Prin urmare, există o derivare în gramatica G'' de forma $S \Rightarrow A_n e(\langle u_n, v_n \rangle) \Rightarrow \dots \Rightarrow A_1 e(\langle u_1, v_1 \rangle) \dots e(\langle u_n, v_n \rangle) \Rightarrow wc_1c_2 \dots c_n$. Rezultă că $z \in L(G'')$, deci $Sz(G') \subseteq L(G'')$.

Invers, pentru orice șir $z \in L(G'')$, $z = wc_1c_2 \dots c_n$ există o derivare $S \Rightarrow A_nc_n \Rightarrow \dots \Rightarrow A_1c_1 \dots c_n \Rightarrow wc_1 \dots c_n$ în raport cu G'' . Această derivare corespunde unei derivări în gramatica G , deci există o derivare în G' caracterizată de secvența $x, \langle u_1, v_1 \rangle, \dots, \langle u_n, v_n \rangle$, cu $w = e(x)$, $c_i = e(\langle u_i, v_i \rangle)$, $i = 1, 2, \dots, n$. În consecință, $z \in Sz(G')$ deci $L(G'') \subseteq Sz(G')$ și teorema este demonstrată.

8.2. Gramatici contextuale regulate

Definiția 8.3. O gramatică contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ se numește *gramatică contextuală regulată* dacă și numai dacă oricare ar fi $x, y \in V^*$ astfel încît $\varphi(x) = \varphi(y)$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$, atunci $\varphi(uxv) = \varphi(uyv)$.

Cu alte cuvinte, dacă $x \bar{\varphi} y$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$, atunci și $uxv \bar{\varphi} uyv$. Vom nota cu $\mathcal{R}$ familia limbajelor generate de gramaticile contextuale regulate.

Teorema 8.6. $\mathcal{C} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ și ambele incluziuni sînt stricte.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă. Construim gramatica contextuală selectivă $G' = (V, B, C, \varphi)$ cu $\varphi(x) = C$ pentru orice $x \in V^*$. Evident, gramatica G' este regulată, deci $L(G) \in \mathcal{R}$ și $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$.

Fie și gramatica contextuală selectivă $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\}, \varphi)$ cu

$$\varphi(a^i) = \{\langle \lambda, a \rangle\}, \quad i \geq 1,$$

$$\varphi(b^i) = \{\langle \lambda, b \rangle\}, \quad i \geq 1,$$

$$\varphi(\lambda) = \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\},$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

Avem egalitatea $L(G) = \{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$, deci limbajul $L(G)$ este în $\mathcal{R} - \mathcal{C}$. Într-adevăr, gramatica G este regulată: dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$, atunci 1) $x = a^i, y = a^j, i, j \geq 1$, sau 2) $x = b^i, y = b^j, i, j \geq 1$, sau 3) $x \notin L(G), y \notin L(G)$, sau 4) $x = y = \lambda$. În primul caz $\varphi(x) = \{\langle \lambda, a \rangle\}$ și $\varphi(a^{i+1}) = \varphi(a^{j+1})$, în al doilea $\varphi(x) = \{\langle \lambda, b \rangle\}$ și $\varphi(b^{i+1}) = \varphi(b^{j+1})$, în al treilea $\varphi(x) = \varphi(y) = \emptyset$ iar cazul 4) este banal. Rezultă astfel că $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$ este incluziune strictă.

Incluziunea $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ este banală; ea este strictă deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}_{lin}$ (teorema următoare), în timp ce familia $\mathcal{S}$ conține limbaje neindependente de context.

Teorema 8.7. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}_{lin}$, incluziune strictă.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm incluziunea, deoarece $\mathcal{L}_{lin} - \mathcal{S} \neq \emptyset$ (teorema 3.6) și $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.

Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală regulată. Considerăm mulțimea finită $V^*/\bar{\varphi}$. Pentru $\alpha \in V^*/\bar{\varphi}$ definim $\varphi(\alpha) = \varphi(x), x \in \alpha$. Pentru orice $\alpha \in V^*/\bar{\varphi}$ și $x \in \alpha, x' \in \alpha, \langle u, v \rangle \in \varphi(\alpha)$ există exact un $\beta \in V^*/\bar{\varphi}$ astfel încât $uxv \in \beta, ux'v \in \beta$. Notăm pe β cu $h(u, \alpha, v)$. Definim gramatica liniară $G' = (V_N, V, S, P)$ astfel:

$$V_N = V^*/\bar{\varphi} \cup \{S\},$$

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$$

unde

$$P_1 = \{S \rightarrow \alpha \mid \alpha \in V^*/\bar{\varphi}, \alpha \cap L(G) \neq \emptyset\},$$

$$P_2 = \{\beta \rightarrow u \alpha v \mid \alpha, \beta \in V^*/\bar{\varphi}, \langle u, v \rangle \in \varphi(\alpha), \beta = h(u, \alpha, v)\},$$

$$P_3 = \{\alpha \rightarrow x \mid \alpha \in V^*/\bar{\varphi}, x \in B \cap \alpha\}.$$

Gramaticile G și G' sînt echivalente.

Într-adevăr, fie $w \in L(G)$. Rezultă că $w = u_n \dots u_1 y v_1 \dots v_n$ cu $y \in B, \langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(y), \langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(u_{i-1} \dots u_1 y v_1 \dots v_{i-1}), i = 2, 3, \dots, n$. Fie $\alpha_0 \in V^*/\bar{\varphi}$ astfel încît $y \in \alpha_0$. Conform definiției gramaticii G' , $\alpha_0 \rightarrow y \in P_3$. Pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, n$ fie $\alpha_i \in V^*/\bar{\varphi}$ astfel încît $u_i \dots u_1 y v_1 \dots v_i \in \alpha_i$. Deoarece $\langle u_{i+1}, v_{i+1} \rangle \in \varphi(\alpha_i)$, rezultă că $\alpha_{i+1} = h(u_{i+1}, \alpha_i, v_{i+1})$, deci $\alpha_{i+1} \rightarrow u_{i+1} \alpha_i v_{i+1} \in P_2$ pentru orice $i = 0, 1, \dots, n-1$. Deoarece $w \in \alpha_n \cap L(G)$, rezultă că $S \rightarrow \alpha_n \in P_1$. În consecință, următoarea derivare este corectă în raport cu gramatica G' : $S \Rightarrow \alpha_n \Rightarrow u_n \alpha_{n-1} v_n \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n \dots u_1 \alpha_0 v_1 \dots v_n \Rightarrow u_n \dots u_1 y v_1 \dots v_n$. În concluzie, $w \in L(G')$ și $L(G) \subseteq L(G')$.

Fie acum $w \in L(G')$ și o derivare a sa în gramatica G' : $S \Rightarrow t_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow t_n = w$. Conform definiției gramaticii G' rezultă că $t_1 = \alpha_n \in V^*/\bar{\varphi}$ și $S \rightarrow \alpha_0 \in P_1$, derivările $t_i \Rightarrow t_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, se fac cu reguli din P_2 , iar $t_{n-1} \Rightarrow t_n$ folosește o regulă din P_3 .

Dacă $n = 2$, atunci $\alpha_0 \rightarrow t_2$ este regulă terminală, deci $t_2 \in B$ și $w \in L(G)$.

Dacă $n > 2$, rezultă că $\alpha_0 \rightarrow t_2 \in P_2$. Există deci $\alpha_i \in V^*/\bar{\varphi}$ și $\langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(\alpha_1)$ astfel încît $\alpha_0 = h(u_1, \alpha_1, v_1)$, $t_2 = u_1 \alpha_1 v_1$. Pentru $1 \leq i \leq n-2$ să presupunem că există $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i$ în $V^*/\bar{\varphi}$, $\langle u_j, v_j \rangle \in \varphi(\alpha_j)$, $j = 1, 2, \dots, i$, astfel încît $\alpha_0 = h(u_1, \alpha_1, v_1), \dots, \alpha_{i-1} = h(u_i, \alpha_i, v_i)$ și $t_1 = \alpha_0, t_2 = u_1 \alpha_1 v_1, \dots, t_{i+1} = u_1 \dots u_i \alpha_i v_i \dots v_1$. Deoarece $t_{i+1} \Rightarrow t_{i+2}$ folosește o regulă din P_2 , rezultă că există $\alpha_i \rightarrow x_i \in P_2$ astfel încît $t_{i+1} = u_1 \dots u_i \alpha_i v_i \dots v_1$, $t_{i+2} = u_1 \dots u_i x_i v_i \dots v_1$, deci există $\alpha_{i+1} \in V^*/\bar{\varphi}$ și $\langle u_{i+1}, v_{i+1} \rangle \in \varphi(\alpha_{i+1})$ astfel încît $\alpha_i = h(u_{i+1}, \alpha_{i+1}, v_{i+1})$ și $x_i = u_{i+1} \alpha_{i+1} v_{i+1}$. Rezultă că $t_{i+2} = u_1 \dots u_{i+1} \alpha_{i+1} v_{i+1} \dots v_1$.

În sfârșit, deoarece trebuie să existe $\alpha_{n-2} \rightarrow x_{n-2} \in P_3$ astfel încît $t_{n-1} = u_1 \dots u_{n-2} \alpha_{n-2} v_{n-2} \dots v_1$, $w = t_n = u_1 \dots u_{n-2} x_{n-2} v_{n-2} \dots v_1$, rezultă că $x_{n-2} \in B \cap \alpha_{n-2}$, $\langle u_{n-2}, v_{n-2} \rangle \in \varphi(\alpha_{n-2})$. Deoarece $\alpha_{n-3} = h(u_{n-2}, \alpha_{n-2}, v_{n-2})$ rezultă că $u_{n-2} x_{n-2} v_{n-2} \in \alpha_{n-3}$. Am găsit deci $x_{n-2} \in B$, $x_{n-2} \in \alpha_{n-2}$, $\langle u_{n-2}, v_{n-2} \rangle \in \varphi(\alpha_{n-2})$, deci $\langle u_{n-2}, v_{n-2} \rangle \in \varphi(x_{n-2})$. Analog, pentru $i = 1, 2, \dots, n-2$, $u_i \dots u_{n-2} x_{n-2} v_{n-2} \dots v_1 \in \alpha_{i-1}$ și, deoarece $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(\alpha_i)$, rezultă că $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(u_{i+1} \dots u_{n-2} x_{n-2} v_{n-2} \dots v_{i+1})$, $i = n-2, n-3, \dots, 1$. În concluzie, șirul $w = t_n$ poate fi generat de către gramatica G , deci $L(G') \subseteq L(G)$ și demonstrația este completă.

Puterea generativă a gramaticilor contextuale regulate se dovedește deci destul de mică.

8.3. Gramatici contextuale cu selectivitate mărginită

Într-o gramatică contextuală selectivă (sau interioară) $G = (V, B, C, \varphi)$, funcția φ este definită pe V^* deci are un caracter infinitistic. În cele ce urmează, încercăm să eliminăm acest aspect neplăcut, definind funcția de selecție a contextelor pe o mulțime finită.

Definiția 8.4. O gramatică contextuală selectivă de ordin k este un cuadruplu $G = (V, B, C, \varphi)$ cu V, B, C ca într-o gramatică contextuală simplă, iar $\varphi: V|_0^k \times V|_0^k \rightarrow \mathcal{P}(C)$, unde $V|_i^j = \{x \in V^* \mid i \leq |x| \leq j\}$. Limbajul generat de gramatica G este cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ pentru care

- i) $B \subseteq L$,
- ii) dacă $x \in B$ și există y, x_1, x_2, z în V^* și $\langle u, v \rangle$ în C astfel încît $0 \leq |x_1|, |x_2| \leq k$, $x = x_1 y = z y_2$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(x_1, x_2)$, atunci $uxv \in L$.

Cu alte cuvinte, într-o gramatică contextuală de ordin k , contextele care se pot adăuga unui șir depind de cel mult k simboluri inițiale și cel mult k simboluri finale ale șirului. Notăm cu $\mathcal{S}_k$ familia limbajelor generate de gramaticile contextuale de ordin k , $k \geq 0$, iar cu $\mathcal{S}_\infty$ familia tuturor limbajelor contextuale de ordin k arbitrar, $\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$.

Următoarele relații sînt evidente: 1) $\mathcal{C} = \mathcal{S}_0$, 2) $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Teorema 8.8. Incluziunile $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}_{i+1}$ sînt stricte pentru orice $i \geq 0$.

Demonstrație. Fie vocabularul $V_k = \{a_1, a_2, \dots, a_{3k}\}$ pentru $k \geq 1$ și fie limbajul $M_k = \{bx \mid x \in V_k^*, \text{ orice subcuvînt al lui } x \text{ de lungime mai mică sau egală cu } k+1 \text{ conține simboluri distincte}\}$.

Evident, pentru orice $k \geq 1$, limbajul M_k este infinit. De exemplu, $\{b\}\{a_1 a_2 \dots a_{k+1}\}^*$ este inclus în M_k pentru orice k . Considerăm gramatica contextuală de ordin k $G = (V_k \cup \{b\}, \{b\}, C, \varphi)$ cu

$$C = \{\langle \lambda, a_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, 3k\},$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, bx) &= \{\langle \lambda, a_i \rangle \mid xa_i \text{ nu conține două apariții ale aceluiași simbol}\}, \\ x \in V_k^*, |x| &\leq k-1, \\ \varphi(\lambda, x) &= \{\langle \lambda, a_i \rangle \mid xa_i \text{ nu conține două apariții ale aceluiași simbol}\}, \\ x \in V_k^*, |x| &= k, \\ \varphi(x, y) &= \emptyset \text{ pentru alte perechi în } V_k^k \times V_k^k. \end{aligned}$$

Să presupunem că există o gramatică $G = (V, B, C, \varphi)$ astfel încât $L(G) = M_k$ și $\varphi: V_0^{k-1} \times V_0^{k-1} \rightarrow \mathcal{P}(C)$. Deoarece $B \subseteq L(G)$, rezultă că orice șir din mulțimea B este de forma bx , $x \in V_k^*$. Prin urmare, la derivarea șirurilor din M_k se folosesc numai contexte de forma $\langle \lambda, v \rangle$, $v \in V_k^*$. Fie $\langle \lambda, v \rangle \in C$ un context folosit efectiv într-o derivare, deci pentru care există $xyz \in M_k$ astfel încât $\langle \lambda, v \rangle \in \varphi(x, z)$, $|x| \leq k-1$, $|z| \leq k-1$. Să presupunem că $v = a_i v'$ și fie $V(x)$, $V(z)$ mulțimea simbolurilor care apar în x , respectiv, în z . Evident, $\text{card}(V_k - (V(x) \cup V(z) \cup \{a_i\})) \geq 3k - (|x| + |z| + 1) \geq 3k - (k-1 + k-1 + 1) = k+1$. Fie w un șir scris cu simbolurile din $V_k - (V(x) \cup V(z) \cup \{a_i\})$, fiecare simbol apărând o singură dată. Evident, șirul $xwa_i z$ este în M_k . Rezultă că putem deriva cu contextul $\langle \lambda, v \rangle$ și obținem șirul $xwa_i zv = xwa_i za_i v'$ care trebuie să fie în M_k . Deoarece $|a_i za_i| \leq k+1$, acest lucru este imposibil. Contradicție, deci $M_k \notin \mathcal{S}_{k-1}$ și teorema este demonstrată.

Teorema 8.9. *Avem incluziunea strictă $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$.*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă de ordin k . Construim gramatica contextuală selectivă $G' = (V, B, C, \varphi')$ cu funcția $\varphi': V^* \rightarrow \mathcal{P}(C)$ definită astfel:

$$\varphi'(x) = \{\langle u, v \rangle \mid \text{există } y, x_1, x_2, z \in V^* \text{ cu } 0 \leq |x_1|, |x_2| \leq k \text{ astfel încât } \langle u, v \rangle \in \varphi(x_1, x_2) \text{ și } x = x_1 y = z x_2\}.$$

Egalitatea $L(G) = L(G')$ este evidentă, deci $\mathcal{S}_\infty \subseteq \mathcal{S}$. În următoarea teoremă vom vedea că $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{L}_{lin}$. Deoarece familia $\mathcal{S}$ conține limbaje neliniare, rezultă că incluziunea anterioară este proprie.

Teorema 8.10. *Familia $\mathcal{S}_\infty$ este strict inclusă în $\mathcal{L}_{lin}$.*

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{S}_\infty \subseteq \mathcal{S}$ și $\mathcal{L}_{lin} - \mathcal{S} \neq \emptyset$, rezultă că este suficient să arătăm că $\mathcal{S}_\infty \subseteq \mathcal{L}_{lin}$.

Pentru aceasta, să considerăm o gramatică contextuală selectivă de ordin k , $G = (V, B, C, \varphi)$, $\varphi: V_0^k \times V_0^k \rightarrow \mathcal{P}(C)$ și fie

$$t = \max\{k, \max\{|x| \mid \text{sau } \langle u, x \rangle \text{ sau } \langle x, v \rangle \in C, u, v \in V^*\}\}.$$

Înlocuim limbajul B cu $B \cup L(G) \cap V_0^t$. Evident, obținem o gramatică echivalentă pe care o notăm în continuare cu G . Construim următoarea gramatică liniară: $G' = (V_N, V, S, P)$ cu

$$V_N = \{S\} \cup \{[x_1, x_2] \mid x_1, x_2 \in V_0^t\},$$

$$P = \{S \rightarrow u[x_1, x_2]v \mid \langle u, v \rangle \in C, x_1, x_2 \in V_0^t, x_1 = x'_1 y_1, x_2 =$$

$$= y_2 x'_2, x'_1, x'_2 \in V_0^k \text{ și } \langle u, v \rangle \in \varphi(x'_1, x'_2)\} \cup$$

$$\cup \{[x_1, x_2] \rightarrow u[y_1, y_2]v \mid \langle u, v \rangle \in C, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V_0^t, x_1 = u x'_1,$$

$x_2 = x'_2 v$ pentru $x'_1, x'_2 \in V^*$, $y_1 = x'_1 z_1$, $y_2 = z_2 x'_2$ și există $y'_1, y'_2, w_1, w_2 \in V^*$ astfel încît $y'_1, y'_2 \in V|_0$, $y_1 = y'_1 w_1$, $y_2 = w_2 y'_2$ și $\langle u, v \rangle \in \varphi(y'_1 y'_2)\} \cup \{[x_1, x_2] \rightarrow x \mid x \in B, x_1, x_2 \in V|_0, x = x_1 y_1 = y_2 x_2 \text{ pentru } y_1, y_2 \in V^*\}$.

Avem egalitatea $L(G) = L(G')$. Într-adevăr, orice derivare

$$S \Rightarrow u_1[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]v_1 \Rightarrow u_1 u_2[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]v_2 v_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 \dots u_n[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}]v_n \dots \\ \dots v_1 \Rightarrow u_1 \dots u_n x v_n \dots v_1.$$

corespunde în mod evident unei derivări $x \Rightarrow u_n x v_n \Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 \dots u_n x v_n \dots v_1$ în raport cu gramatica G , deci $L(G') \subseteq L(G)$.

Invers, fie $x \Rightarrow u_n x v_n \Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 u_2 \dots u_n x v_n \dots v_2 v_1$ o derivare în raport cu gramatica G . Există y_1, z_1 astfel încît $\langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(y_1, z_1)$ și $u_2 \dots u_n x v_n \dots v_2 = y_1 w_1 = w'_1 z'_1$. Fie $s_1 = \max\{|u_2|, |v_2|, |y_1|, |z_1|\}$. Atunci, $u_2 \dots u_n x v_n \dots v_2 = y'_1 w'_1 = w''_1 z'_1$, $|y'_1| = |z'_1| = s_1$. Rezultă că $S \rightarrow u_1[y'_1, z'_1]v_1$ este în P . Mai departe, $u_3 \dots u_n x v_n \dots v_3 = y_2 w_2 = w'_2 z'_2$ cu $\langle u_2, v_2 \rangle \in \varphi(y_2, z_2)$. Fie $s_2 = \max\{|u_3|, |v_3|, |y_2|, |z_2|, |y'_1|, |z'_1|\}$. Atunci $u_3 \dots u_n x v_n \dots v_3 = y'_2 w'_2 = w''_2 z'_2$ cu $|y'_2| = |z'_2| = s_2$. Obținem regula $[y'_1, z'_1] \rightarrow u_2[y'_2, z'_2]v_2$ din P . Continuăm în acest mod pînă ce obținem $x = y_n w_n = w'_n z'_n$ cu $\langle u_n, v_n \rangle \in \varphi(y_n, z_n)$, $x \in B$. Fie $s_n = \max\{|y_n|, |z_n|, |y'_{n-1}|, |z'_{n-1}|\}$. Atunci $x = y'_n w'_n = w''_n z'_n$ pentru $|y'_n| = |z'_n| = s_n$ și $[y'_n, z'_n] \rightarrow x$ este în P . În consecință, șirul $u_1 \dots u_n x v_n \dots v_1$ poate fi derivat cu aceste reguli în gramatica G' , deci $L(G) \subseteq L(G')$ și demonstrația este completă.

Observația 8.1. Am obținut pînă acum patru familii strict intermediare între familia limbajelor contextuale simple și familia limbajelor liniare: $\mathcal{CP}$ (teoremele 7.4, 7.5), $\mathcal{C}_v$ (teorema 8.2), $\mathcal{R}$ (teoremele 8.6, 8.7) și $\mathcal{S}_\infty$ (teorema 8.10). Relațiile dintre aceste patru familii sînt *probleme deschise* (P17). Pe de altă parte, toate familiile $\mathcal{S}_i$, $i \geq 1$, $\mathcal{S}_\infty$ sînt incomparabile cu $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ și $\mathcal{IS}$. Într-adevăr, conform teoremei 8.10, $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{L}_{lin}$; deoarece $\mathcal{G}$ și $\mathcal{I}$ conțin limbaie neindependente de context, rezultă că este suficient să găsim limbaie în $\mathcal{S}_i$ care nu sînt în $\mathcal{G} \cup \mathcal{IS}$. Deoarece $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$ și $\mathcal{C} - \mathcal{IS} \neq \emptyset$ (teorema 3.4), problema se reduce la găsirea unui limbaj $L \in \mathcal{S}_1$ care să nu fie în familia $\mathcal{G}$. Un asemenea limbaj este $L = \{a^n b \mid n \geq 1\} \cup \{c^n b \mid n \geq 1\}$ care, evident, nu este contextual generalizat, dar poate fi generat cu gramatica contextuală de ordin 1 $G = (\{a, b, c\}, \{ab, cb\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle b, \lambda \rangle\}, \varphi)$ unde $\varphi(a, b) = \{\langle a, \lambda \rangle\}$, $\varphi(c, b) = \{\langle c, \lambda \rangle\}$.

Restricția funcției de selectare la un domeniu finit poate fi făcută și pentru gramaticile contextuale interioare selective.

Definiția 8.5. O gramatică contextuală interioară selectivă de ordin k , $k \geq 0$, este un quadruplu $G = (V, B, C, \varphi)$ cu V, B, C ca într-o gramatică contextuală simplă și cu $\varphi: V|_0^k \rightarrow \mathcal{P}(C)$. Limbajul generat de gramatica G se definește în mod uzual.

În cuvinte, contextele care se adaugă depind numai de subcuvinte de lungime cel mult k . Notăm cu $\mathcal{S}_k$ familia limbajelor generate de gramaticile contextuale interioare selective de ordin k și $\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k$.

Următoarele relații sînt evidente: 1) $\mathcal{S}_j \subseteq \mathcal{S}_{j+1}$, $j \geq 0$, 2) $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$, 3) $\mathcal{S}_\infty \subseteq \mathcal{IS}$.

Teorema 8.11. Toate incluziunile anterioare sînt stricte.
Demonstrație. Fie limbajul

$$L_k = \{ba^k ba^{k+1}\}^*, \quad k \text{ fixat.}$$

Să presupunem că $L_k \in \mathcal{I}_k$ și fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică interioară selectivă de ordin k pentru L_k . Șirurile $x \in \{a, b\}^* \cap \text{Sub}(L_k)$ pentru care $\varphi(x) \neq \emptyset$ pot fi de una din următoarele forme: ba^i , a^j , $a^i b$, $a^r b a^p$, $i + 1 \leq k$, $j \leq k$, $r + p + 1 \leq k$. Să luăm șirul $x = ba^i$, $i + 1 \leq k$. Fie $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$ cu $|uv| \neq \lambda$. Ambele șiruri $uba^i va^{k+1-i}$ și $ba^k uba^i va^{k+1-i}$ trebuie să fie în limbajul $L(G)$, deci în L_k . Dacă $v = \lambda$, atunci trebuie să avem $u = (ba^{k+1})^t$, $t \geq 1$, și atunci $ba^k uba^{k+1-i}$ nu poate fi în L_k . Dacă $v \neq \lambda$, atunci v trebuie să fie de forma $v = v'ba^i$. Dacă v' nu conține nici o apariție a simbolului b , atunci trebuie să avem $v = a^{k+1-i}ba^i$ și deci $ba^k uba^i va^{k+1-i}$ nu este în L_k . Dacă v' conține o apariție a simbolului b , atunci trebuie să avem $v = v''ba^{k+1}ba^i$. Din nou $ba^k uba^i va^{k+1-i}$ nu este în L_k . Toate aceste cazuri sînt contradictorii, deci șirul x nu poate fi egal cu ba^i . Discuții similare sînt valabile pentru $x = a^j$, $x = a^i b$, $x = a^r b a^p$. Prin urmare, G nu poate genera limbajul L_k , deci $L_k \notin \mathcal{I}_k$.

Evident, limbajul L_k este în $\mathcal{I}_{k+1}$ deoarece este generat de gramatica $G = (\{a, b\}, \{\lambda, ba^k ba^{k+1}\}, \{\langle \lambda, ba^k ba^{k+1} \rangle\}, \varphi)$ unde

$$\varphi(a^{k+1}) = \{\langle \lambda, ba^k ba^{k+1} \rangle\},$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ pentru } x \in V|_0^{k+1} - \{a^{k+1}\}.$$

În consecință, $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$ este incluziune strictă.

Să considerăm gramatica interioară selectivă $G = (\{a, b, c\}, \{abc\}, \{\langle a, bc \rangle\}, \varphi)$ cu

$$\varphi(a^n b^n) = \{\langle a, bc \rangle\}, \quad n \geq 1,$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

Fie $G' = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală interioară selectivă de ordin k , $k \geq 0$, care generează limbajul $L(G)$. Toate contextele din C trebuie să conțină numere egale de apariții ale simbolurilor a , b și c . Șirurile de forma $a^n b^n c^n$ sînt în $L(G)$, deci gramatica G' trebuie să conțină cel puțin un context de forma $\langle a^i, b^i c^i \rangle$ sau de forma $\langle a^i b^i, c^i \rangle$. Pe de altă parte, pentru a genera șirurile $a^n b^n c^n$ cu n arbitrar de mare, contextele anterioare trebuie să se găsească în mulțimi $\varphi(x)$ pentru arbitrar de multe șiruri x . În consecință, aplicația φ nu poate fi definită pe mulțimea $V|_0^k$, deci $L(G) \notin \mathcal{I}_k$ pentru orice întreg k și demonstrația este completă.

Corolar. $\mathcal{L}_3 - \mathcal{I}_k \neq \emptyset$ pentru orice k .

Într-adevăr, limbajul L_k din demonstrația anterioară este limbaj regulat.

Teorema 8.12. Orice pereche $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$, $\mathcal{L} \in \{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_\infty\}$, $\mathcal{L}' \in \{\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}\}$ conține familii incomparabile.

Demonstrație. Limbajul $L = \{ba^n c \mid n \geq 1\}$ nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$ (are $K_0(L) = K'_0(L) = L$), dar el este în familia $\mathcal{I}_1$ deoarece poate fi generat cu gramatica $G = (\{a, b, c\}, \{bac\}, \{\langle \lambda, a \rangle\}, \varphi)$ cu

$$\varphi(b) = \{\langle \lambda, a \rangle\}, \quad \varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(\lambda) = \emptyset.$$

Prin urmare, $\mathcal{L} - \mathcal{L}' \neq \emptyset$ pentru orice $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ ca în enunț.

Invers, am văzut că familia $\mathcal{C}$ conține limbaje care nu sînt în $\mathcal{I}\mathcal{S}$ (teorema 3.4), deci avem și $\mathcal{L}' - \mathcal{L} \neq \emptyset$.

Corolar. Toate familiile $\mathcal{I}_i$, $i \geq 1$, $\mathcal{I}_\infty$ conțin limbaje care nu sînt în $\mathcal{I}$. Într-adevăr, limbajul $L = \{ba^nc \mid n \geq 1\}$ nu este în familia $\mathcal{I}$.

Teorema 8.13. 1) $\mathcal{I}_\infty \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{L}_3)$ și $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$. 2) Familia $\mathcal{L}_3$ este incomparabilă cu oricare familie $\mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. 3) $\mathcal{L}_2 - \mathcal{I}_\infty \neq \emptyset$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală interioară selectivă de ordin k . Considerăm aplicația $\varphi': C \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ definită prin

$$\varphi'(\langle u, v \rangle) = \{x \in V^k \mid \varphi(x) \text{ conține contextul } \langle u, v \rangle\}.$$

Evident, gramatica contextuală interioară condițională (G', φ') , $G' = (V, B, C)$ generează același limbaj ca gramatica G . Rezultă că $\mathcal{I}_\infty \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{L}_3)$. Deoarece limbajul generat de gramatica G din finalul demonstrației teoremei 8.11 este în $\mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$, dar nu și în $\mathcal{I}_\infty$, rezultă că punctul 1) este complet demonstrat. Corolarul teoremei 8.11 stabilește că $\mathcal{L}_3 - \mathcal{I}_k \neq \emptyset$. Limbajul $L = \{a^n cb^n \mid n \geq 0\}$ nu este regulat, dar este în $\mathcal{I}_1$ deoarece poate fi generat cu gramatica interioară selectivă de ordin 1 $G = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle a, b \rangle\}, \varphi)$ cu $\varphi(a) = \varphi(b) = \emptyset$ și $\varphi(c) = \{\langle a, b \rangle\}$.

În sfîrșit, $\mathcal{L}_2 - \mathcal{I}\mathcal{S} \neq \emptyset$ (teorema 3.7) iar $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}\mathcal{S}$, deci $\mathcal{L}_2 - \mathcal{I}_\infty \neq \emptyset$ și avem și punctul 3).

Rămîne deschisă problema dacă $\mathcal{I}_\infty \subseteq \mathcal{L}_2$ (problema P18). Credem că răspunsul este afirmativ. Deoarece $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$ și $\mathcal{I}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ (teorema 7.14), rezultă că $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{L}_1$.

8.4. Gramatici de ramificare

Gramaticile de ramificare fac legătura între gramaticile contextuale și automatele finite de ramificare din [27]. Ele sînt, de fapt, gramatici v -contextuale cu selectivitatea mărginită.

Definiția 8.6. Un *automat finit de ramificare* este un sistem $A = (K, V, \delta, s_0, R)$ unde V este un vocabular, K este mulțimea finită și nevidă a stărilor, $s_0 \in K$ este starea inițială, $\delta: K \times V \rightarrow K$ indică starea următoare, iar $R \subseteq K \times \mathcal{P}(V_\lambda)$ ($V_\lambda = V \cup \{\lambda\}$) este mulțimea ramificărilor.

Automatul identifică o familie de limbaje, acelea care pot fi recunoscute de automatul finit subiacent lui A și au structura de ramificare descrisă de mulțimea R . Dacă presupunem că $R \subseteq K \times V_\lambda$, atunci automatul va identifica un limbaj peste V în felul următor: $x = x_1 \dots x_n$, $x_i \in V$, este în limbajul $L(A)$ dacă și numai dacă există $s_0, s_1, \dots, s_n$ în K astfel încît $\delta(s_{i-1}, x_i) = s_i$ și $(s_i, x_{i+1}) \in R$ pentru orice i și $(s_n, \lambda) \in R$. La selectarea limbajului concură două componente ale automatului: funcția δ și mulțimea R . Se poate demonstra ușor că un limbaj este recunoscut de un asemenea automat dacă și numai dacă el este regulat. Se impun deci modificări care să conducă la rezultate noi. Dacă renunțăm la funcția δ și facem ca ramificările din R să depindă numai de simbolurile din V , nu și de stările automatului, atunci obținem exact o gramatică v -contextuală cu selectivitate mărginită cu contexte de forma $\langle \lambda, a \rangle$, $a \in V_\lambda$. Vom continua totuși să lucrăm în termeni de gramatici de ramificare.

Definiția 8.7. O *gramatică de ramificare simplă de ordin k* este un sistem $G = (V, B, R)$ unde V este un vocabular, $B \subseteq V^k$, $R \subseteq V^k \times V_\lambda$. Asociem acestei gramatici două limbaje. Limbajul generat în sens slab de G este $W(G) =$

$= D(B, L_R)$, unde $L_R = \{xa \mid (x, a) \in R, x \in V_1^k, a \in V\}$. Limbajul generat în sens tare de G este

$$L(G) = W(G) \cap (\{\lambda\} \cup \{x_1 x_2 \mid x_1 \in V^*, (x_2, \lambda) \in R\}).$$

Vom nota cu $\mathcal{RS}_k$ familia limbajelor generate în sens tare de gramaticile de ramificare simplă de ordin k , $k \geq 1$, și $\mathcal{RS}_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{RS}_i$.

Teorema 8.14. *Avem incluziunile stricte $\mathcal{RS}_i \subset \mathcal{RS}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ și $\mathcal{RS}_\infty \subset \mathcal{L}_3$.*

Demonstrație. Incluziunile $\mathcal{RS}_i \subseteq \mathcal{RS}_{i+1}$ sînt banale, iar $\mathcal{RS}_\infty \subseteq \mathcal{L}_3$ rezultă din modul de construire a limbajului $L(G)$. (Familia $\mathcal{L}_3$ este închisă la intersecție, iar limbajul $D(L_1, L_2)$ este regulat pentru L_1, L_2 finite.)

Să considerăm limbajul $L_k = \{a^k\}$. $L_k \in \mathcal{RS}_k$ deoarece poate fi generat cu gramatica $G = (\{a\}, \{a^k\}, \{(a, \lambda)\})$. Să presupunem că $L_k = L(G')$ pentru $G' = (\{a\}, B, R)$, gramatică de ordin mai mic decît k . Orice șir $x \in B$ are $|x| \leq k-1$, deci există cel puțin o pereche (a^i, a) în R . De asemenea, trebuie să existe și o pereche (a^j, λ) . Rezultă că limbajul $L(G')$ este infinit. Contradicție; prin urmare, $L_k \notin \mathcal{RS}_{k-1}$, deci $\mathcal{RS}_{k-1} \subset \mathcal{RS}_k$ este incluziune strictă.

Fie și limbajul regulat $L = \{a^n b a^m \mid n, m \geq 1\}$ și să presupunem că el poate fi generat cu o gramatică de ramificare, $G = (V, B, R)$. În limbajul L există șiruri cu subcuvinte de forma a^i , cu i arbitrar de mare, deci trebuie să existe o pereche (a^i, a) în R . Pe de altă parte, trebuie să existe și perechi de forma (a^s, b) , (a^r, c) , $(a^t b a^u, a)$, $(a^v c, \lambda)$. Prin urmare, limbajul $L(G)$ conține șiruri cu mai mult de o apariție a simbolului b , ceea ce este contradictoriu.

Gramaticile de ramificare au proprietăți interesante, asemănătoare celei din teorema 8.4.

Teorema 8.15. *Un limbaj este regulat dacă și numai dacă este imaginea homomorfică a unui limbaj din familia $\mathcal{RS}_1$.*

Demonstrație. Fie $A = (K, V, \delta, s_0, F)$ un automat finit determinist. Construim gramatica de ramificare de ordin 1 $G = (U, B, R)$ cu

$$U = \{[a, s] \mid a \in V, s \in K\},$$

$$B = \{[a, s] \mid \delta(s_0, a) = s, s \in K, a \in V\} \cup \{\lambda \mid \lambda \in L(A)\},$$

$$R = \{([a, s], [a', s']) \mid \delta(s, a') = s', a, a' \in V, s, s' \in K\} \cup \{([a, s], \lambda) \mid s \in F, a \in V\}.$$

Fie $h: U^* \rightarrow V^*$ homomorfismul definit prin $h([a, s]) = a, a \in V, s \in K$. Avem egalitatea $L(A) = h(L(G))$.

Într-adevăr, fie $x \in L(A)$, $x = a_1 a_2 \dots a_n, a_i \in V$. Există $s_0, s_1, \dots, s_n \in K$ astfel încît $s_i = \delta(s_{i-1}, a_i), i = 1, 2, \dots, n, s_n \in F$. Prin urmare, $[a_1, s_1] \in B, ([a_i, s_i], [a_{i+1}, s_{i+1}]) \in R, i = 1, 2, \dots, n-1$ și $([a_n, s_n], \lambda) \in R$. Șirul $[a_1, s_1] \dots [a_n, s_n]$ este deci în $L(G)$ și $a_1 \dots a_n = h([a_1, s_1] \dots [a_n, s_n]) \in h(L(G))$.

Invers, fie $x = [a_1, s_1] \dots [a_n, s_n] \in L(G)$. Deoarece $[a_1, s_1] \in B$, rezultă că $\delta(s_0, a_1) = s_1$. Deoarece $([a_i, s_i], [a_{i+1}, s_{i+1}]) \in R$, rezultă că $\delta(s_i, a_{i+1}) =$

$= s_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$. În plus, $([a_n, s_n], \lambda) \in R$ implică faptul că $s_n \in F$. Prin urmare, $a_1 \dots a_n \in L(A)$ și avem $h(x) = a_1 \dots a_n$, deci $h(L(G)) \subseteq L(A)$.

Implicația inversă din enunț rezultă în urma teoremei anterioare, ținând seama că familia $\mathcal{L}_3$ este închisă la homomorfisme.

În continuare vom permite ramificări în ambele direcții, nu numai la dreapta. Obținem astfel gramatici mai asemănătoare cu gramaticile contextuale.

Definiția 8.8. O gramatică de ramificare dublă de ordin $k, k \geq 1$, este un sistem $G = (V, B, R)$ unde V este un vocabular, $B \subseteq V|_0^k, R \subseteq (V_\lambda \times V|_1^k) \times (V|_1^k \times V_\lambda)$.

Limbajul generat în sens slab de gramatica G (notat $W(G)$) este cel mai mic limbaj $L \subseteq V^*$ pentru care

- i) $B \subseteq L$,
- ii) dacă $x \in L, x = wx_1 = x_2w', x_1, x_2, w, w' \in V^*$ și $((\alpha, w), (w', \beta)) \in R$ pentru $\alpha, \beta \in V_\lambda$, atunci $\alpha x \beta \in L$.

Limbajul generat în sens tare este

$L(G) = W(G) \cap (\{\lambda\} \cup \{x \in V^* \mid \text{există } x_1, x_2, w, w' \in V^* \text{ astfel încât } x = wx_1 = x_2w' \text{ și } ((\lambda, w), (w', \lambda)) \in R\})$.

Vom nota cu $\mathcal{RD}_k$ familia limbajelor generate în sens tare de gramaticile de ramificare dublă de ordin k și $\mathcal{RD}_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{RD}_i$.

Teorema 8.16. Au loc următoarele incluziuni stricte: $\mathcal{RS}_k \subset \mathcal{RD}_k \subset \mathcal{RD}_{k+1}, k \geq 1$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, R)$ o gramatică de ramificare simplă de ordin k . Construim gramatica de ramificare dublă $G' = (V, B, R')$ unde $R' = \{((\lambda, a), (x, \alpha)) \mid a \in V, (x, \alpha) \in R\}$. Evident, $L(G) = L(G')$. Rezultă deci că $\mathcal{RS}_k \subseteq \mathcal{RD}_k$. Incluziunea este strictă deoarece familia $\mathcal{RD}_1$ conține limbaje care nu sînt regulate. Într-adevăr, fie gramatica

$$G = (\{a, b\}, \{a\}, \{((a, a), (a, b)), ((a, a), (b, b)), ((\lambda, a), (b, \lambda))\}).$$

Se vede imediat că $L(G) = \{a^n b^{n-1} \mid n \geq 2\}$ și acest limbaj nu este regulat.

În sfîrșit, fie limbajul $L_k = \{a^k\}$. El este în $\mathcal{RS}_k$ (demonstrația teoremei 8.14). Să presupunem că $L_k = L(G)$ pentru $G = (V, B, R)$ o gramatică de ramificare dublă de ordin $k-1$. Orice șir $x \in B$ trebuie să fie de forma a^i , $i \leq k-1$. În mulțimea R există deci cel puțin o pereche $((\alpha, a^i), (a^j, \beta))$ cu $\alpha, \beta \in \{a, \lambda\}, \alpha\beta \neq \lambda$. Rezultă că limbajul $W(G)$ este infinit. Deoarece R conține cel puțin o pereche $((\lambda, a^i), (a^j, \lambda))$, rezultă că și limbajul $L(G)$ este infinit. Contradicție, deci incluziunea $\mathcal{RD}_{k-1} \subset \mathcal{RD}_k$ este strictă.

Teorema 8.17. Familia $\mathcal{RD}_\infty$ este strict inclusă în $\mathcal{L}_{lin}$.

Demonstrație. Fie $G = (V_N, B, R)$ o gramatică de ramificare dublă. Construim gramatica liniară $G' = (V_N, V, S, P)$ cu

$$V_N = \{S\} \cup \{[w, w'] \mid w, w' \in V^*, |w| = |w'| = k\},$$

$$P = \{S \rightarrow w \mid w \in L, |w| \leq 2k+1\} \cup$$

$$\cup \{S \rightarrow [z, z'] \mid \text{există } ((\lambda, x), (x', \lambda)) \in R \text{ astfel încât } z = xy, z' = y'x'\}$$

pentru $y, y' \in V^*$ $\cup$

$\cup \{[w, w'] \rightarrow \alpha[z, z']\alpha' \mid \text{există } y, y' \in V_\lambda \text{ astfel încît } wy = \alpha z, y'w' = z'\alpha', \alpha, \alpha' \in V_\lambda \text{ și există } ((\alpha, x), (x', \alpha')) \text{ în } R \text{ astfel încît } z = xu, z' = vx' \text{ pentru } u, v \in V^*\} \cup$

$\cup \{[w, w'] \rightarrow wxw' \mid x \in V_\lambda, wxw' \in W(G)\}.$

Să observăm că dacă două șiruri din limbajul $W(G)$ se obțin unul din altul prin aplicarea unei perechi din R , atunci lungimile celor două șiruri diferă prin 1 sau 2. Deoarece B conține numai șiruri cu $|x| \leq k$, rezultă că orice șir din limbajul $L(G)$ de lungime mai mare ca $2k + 1$ are în derivările sale un șir din $W(G)$ de lungime $2k$ sau $2k + 1$.

Avem egalitatea $L(G) = L(G')$. Fie $x \in L(G)$. Dacă $|x| \leq 2k + 1$, atunci $x \in L(G')$ deoarece $S \rightarrow x \in P$. Dacă $|x| > 2k + 1$, atunci $x = a_r \dots a_1 b_1 \dots b_{2k+1} a'_1 \dots a'_r$, cu $a_i, a'_i \in V_\lambda, b_1 \dots b_{2k+1} \in W(G)$ și pentru fiecare $i \geq 1$ avem $((a_i, u_{i-1}), (u'_{i-1}, a'_i)) \in R$ și $u_{i-1} w u'_{i-1} = a_{i-1} \dots a_1 b_1 \dots b_{2k+1} a'_1 \dots a'_{i-1}$ pentru un șir $w \in V^*$. În plus, $((\lambda, u_r), (u'_r, \lambda)) \in R$ și $u_r w u'_r = x$ pentru $w \in V^*$. Prin urmare, în P există regulile $S \rightarrow [u_r v_r, v'_r u'_r]$ cu $|u_r v_r| = |u'_r v'_r| = k$, $[u_i v_i, v'_i u'_i] \rightarrow a_i [u_{i-1} v_{i-1}, v'_{i-1} u'_{i-1}] a'_i$ cu $|u_i v_i| = |u'_i v'_i| = k, i = 1, 2, \dots, r$, și $[u_0 v_0, v'_0 u'_0] \rightarrow b_1 \dots b_{2k+1}$. În concluzie, $x \in L(G')$, deci $L(G) \subseteq L(G')$.

Invers, fie $x \in L(G')$. Dacă $|x| \leq 2k + 1$, atunci există $S \rightarrow x$ în P deci $x \in L(G)$. Dacă $|x| > 2k + 1$, atunci $x = a_r \dots a_1 b_1 \dots b_{2k+1} a'_1 \dots a'_r$, $a_i, a'_i \in V_\lambda, b_i \in V_\lambda, |b_1 \dots b_{2k+1}| \geq 2k$ și există o derivare

$$S \Rightarrow [w_r, w'_r] \Rightarrow a_r [w_{r-1}, w'_{r-1}] a'_r \Rightarrow \dots \Rightarrow a_r \dots a_1 [w_0, w'_0] a'_1 \dots a'_r \Rightarrow a_r \dots a_1 b_1 \dots b_{2k+1} a'_1 \dots a'_r.$$

Din definiția gramaticii G' rezultă că există u_i, u'_i, v_i, v'_i astfel încît $w_i = u_i v_i, w'_i = v'_i u'_i$ și $((a_i, u_i), (u'_i, a'_i)) \in R, i = 1, 2, \dots, r$. În plus, $((\lambda, u_r), (u'_r, \lambda)) \in R$ și $b_1 \dots b_{2k+1} \in W(G)$. Rezultă că $x \in L(G)$, deci $L(G') \subseteq L(G)$ și avem incluziunea $\mathcal{RD}_\infty \subseteq \mathcal{L}_{lin}$.

Faptul că incluziunea este strictă rezultă din următoarea leamnă.

Lema 8.1. Dacă $L \subseteq \{a\}^*$, $L \in \mathcal{RD}_\infty$, atunci există $p \geq 0$ astfel încît pentru orice $x \in L, |x| > p$, există $y \in L$ astfel încît $|y| - |x| \leq 2$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, R)$ o gramatică de ramificare dublă de ordin k și fie

$$p_1 = \min \{ \max(|w|, |w'|) \mid ((\lambda, w), (w', \lambda)) \in R \},$$

$$p_2 = \max \{ |x| \mid x \in B \},$$

$$p = \max(p_1, p_2).$$

Dacă există un șir $x \in L(G)$ cu $|x| > p$, atunci $L(G)$ este limbaj infinit. Orice șir din $W(G)$ de lungime mai mare decît p_1 este în $L(G)$. Deoarece lungimea șirurilor consecutive din $W(G)$ diferă cel mult cu 2, rezultă afirmația din enunț.

Un rezultat similar teoremei 8.15 este adevărat și pentru gramaticile de ramificare dublă.

Teorema 8.18. *Un limbaj este liniar dacă și numai dacă el este imaginea homomorfică a unui limbaj din $\mathcal{RD}_1$.*

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{RD}_1 \subset \mathcal{L}_{lin}$ și $\mathcal{L}_{lin}$ este închisă la homomorfisme, avem o implicație a teoremei.

Invers, fie $G = (V_N, V, S, P)$ o gramatică liniară. Presupunem că G este λ -liberă, adică nu conține λ -reguli diferite de $S \rightarrow \lambda$ (caz în care simbolul S apare numai în partea stângă a regulilor). Înlocuim fiecare regulă $A \rightarrow x$, $x = a_1 a_2 \dots a_r$, $a_i \in V$, cu $A \rightarrow a_1 A_1$, $A_1 \rightarrow a_2 A_2$, $\dots$, $A_{r-2} \rightarrow a_{r-1} A_{r-1}$, $A_{r-1} \rightarrow a_r$. De asemenea, înlocuim fiecare regulă $A \rightarrow x D y$, $x = a_1 \dots a_r$, $y = b_1 \dots b_t$, cu $A \rightarrow a_1 A_1 b_1$, $A_1 \rightarrow a_2 A_2 b_{t-1}$, $\dots$, $A_{r-1} \rightarrow a_r A_r b_{t-r+1}$, $A_r \rightarrow A_{r+1} b_{t-r}$, $\dots$, $A_{t-1} \rightarrow D b_1$ (am presupus că $r < t$; cazul $r \geq t$ este analog). Putem deci presupune că toate regulile din P sînt de una din formele:

$$A \rightarrow a, a \in V, \quad S \rightarrow \lambda, \quad A \rightarrow \alpha D \beta, \quad \alpha, \beta \in V_\lambda, \quad A, D \in V_N.$$

Construim următoarea gramatică de ramificare dublă: $G' = (U, B, R)$ cu

$$U = \{[\alpha, A] \mid \alpha \in V_\lambda, A \in V_N \cup \{T\}\}, \quad T \text{ simbol nou},$$

$$B = \{[\alpha, T] \mid A \rightarrow \alpha \in P, \alpha \in V_\lambda\} \cup \{\lambda \mid S \rightarrow \lambda \in P\},$$

$$R = \{([[\alpha_1, A_1], [\alpha_2, A_2]], [[\alpha_3, A_2], [\alpha_4, A_1]]) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V_\lambda \text{ și } A_1 \rightarrow \alpha_2 A_2 \alpha_3 \in P\} \cup$$

$$\cup \{([\lambda, [\alpha_2, A_2]], [[\alpha_3, A_2], \lambda]) \mid \alpha_2, \alpha_3 \in V_\lambda \text{ și } S \rightarrow \alpha_2 A_2 \alpha_3 \in P\} \cup$$

$$\cup \{([[\alpha_1, A_1], [\alpha_2, T]], [[\alpha_2, T], [\alpha_3, A_1]]) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V_\lambda \text{ și } A_1 \rightarrow \alpha_2 \in P\}.$$

Considerăm și homomorfismul $h: U^* \rightarrow V^*$ definit prin $h([\alpha, A]) = \alpha \in V_\lambda$, $A \in V_N \cup \{T\}$. Ca în demonstrația teoremei 8.15 se poate demonstra că avem egalitatea $L(G) = h(L(G'))$.

Să examinăm acum relațiile dintre familiile de limbaje de ramificare și unele familii de limbaje contextuale.

Teorema 8.19. *Familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$ sînt incomparabile cu oricare dintre familiile $\mathcal{RS}_i$, $\mathcal{RD}_i$, $i \geq 1$, $\mathcal{RS}_\infty$, $\mathcal{RD}_\infty$.*

Demonstrație. Limbajul $L = \{ab^n c \mid n \geq 1\}$ nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{I}$ dar poate fi generat cu următoarea gramatică de ramificare simplă:

$$G = (\{a, b, c\}, \{a\}, \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, \lambda)\}).$$

Rezultă că $\mathcal{RS}_i - \mathcal{L} \neq \emptyset$, $\mathcal{L} \in \{\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{I}\}$ și, deoarece $\mathcal{RS}_i \subset \mathcal{RD}_i$ (teorema 8.16), afirmațiile sînt adevărate și pentru $\mathcal{RD}_i$.

Invers, conform lemei 8.1, limbajul $L = \{a^{3n} \mid n \geq 1\}$ nu este în familia $\mathcal{RD}_\infty$. El este însă în $\mathcal{C} \cap \mathcal{I}$ deoarece poate fi generat cu gramatica (interioară sau exterioară) $G = (\{a\}, \{a^3\}, \{(\lambda, a^3)\})$ și, cu aceasta, demonstrația este completă.

Teorema 8.20. *Familiile limbajelor generate în sens slab de gramaticile de ramificare simplă și dublă sînt incomparabile cu $\mathcal{C}$ și $\mathcal{G}$ și sînt strict incluse în $\mathcal{S}$.*

Demonstrație. Limbajul $L = \text{Pref}\{ab^m c^n d^p \mid m, n, p \geq 1\} - \{\lambda\}$ este generat în sens slab de gramatica de ramificare simplă

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{a\}, \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (d, d), (d, \lambda)\}).$$

Acest limbaj nu este însă în familia $\mathcal{G}$ (orice gramatică contextuală generalizată $G = (V, B_1, B_2, C)$ pentru L conține în B_1 numai șiruri de forma ax , deci toate contextele din C sînt de forma $\langle \lambda, v \rangle$; există cel puțin două contexte $\langle \lambda, v \rangle, \langle \lambda, v' \rangle$ cu v, v' conținînd simboluri distincte — cu aceste contexte putem genera șiruri care nu sînt în limbajul L). Pe de altă parte, limbajul $L = \{a^{3n} \mid n \geq 1\}$ nu poate fi generat în sens slab de o gramatică de ramificare dublă (lema 8.1 este valabilă și pentru limbaje generate în sens slab). Acest limbaj este însă în familia $\mathcal{C}$.

Fie acum $G = (V, B, R)$ o gramatică de ramificare dublă. Construim gramatica contextuală selectivă $G' = (V, B, C, \varphi)$ unde

$$C = \{\langle \alpha, \beta \rangle \mid ((\alpha, w), (w', \beta)) \in R\},$$

$$\varphi(x) = \{\langle \alpha, \beta \rangle \mid \text{există } w, w', x_1, x_2 \in V^* \text{ astfel încît } x = wx_1 = x_2w' \text{ și } ((\alpha, w), (w', \beta)) \in R\}.$$

Este evident că $W(G) = L(G')$ și demonstrația este completă.

Teorema 8.21. Toate familiile $\mathcal{RS}_i, i \geq 2$, și $\mathcal{RS}_\infty$ sînt anti-FAL.

Demonstrație. Reuniune. Limbajele

$$L_1 = \{a^n b \mid n \geq 1\}^+, \quad L_2 = \{a^n c \mid n \geq 1\}^+$$

sînt în $\mathcal{RS}_1$ deoarece, de exemplu, L_1 este generat de gramatica $G_1 = (\{a, b\}, \{a\}, \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, \lambda)\})$. Limbajul $L_1 \cup L_2$ nu este în $\mathcal{RS}_\infty$. Orice gramatică $G = (V, B, R)$ pentru acest limbaj trebuie să conțină perechile $(a^i, a), (a^j, b), (a^r, c), (a^k b, a), (a^s b, \lambda), (a^t c, \lambda), i, j, k, r, s, t \geq 0$. În felul acesta putem genera și șiruri de forma $a^n b a^m c$ care nu sînt în $L_1 \cup L_2$, deci $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{RS}_\infty$.

Concatenare. Limbajele $L_1 = \{a^n b \mid n \geq 1\}, L_2 = \{a^n c \mid n \geq 1\}$ sînt în $\mathcal{RS}_1$, dar $L_1 L_2$ nu este în $\mathcal{RS}_\infty$, după cum am văzut în demonstrația teoremei 8.14.

Închidere Kleene. Să considerăm limbajul $L = \{ab^n a \mid n \geq 0\}$. El este generat de gramatica $G = (\{a, b\}, \{aa, ab\}, \{(a, \lambda), (b, b), (b, a)\})$ deci este în familia $\mathcal{RS}_2$. Limbajul L^+ nu este însă în $\mathcal{RS}_\infty$. Într-adevăr, fie $G = (V, B, R)$ o gramatică care generează acest limbaj. Deoarece $aa \in L^+$, rezultă că R conține perechea (a, λ) sau (aa, λ) . Deoarece șirul $ab^n aab^m a$ este în L^+ , rezultă că șirul $ab^n aa$ este în $W(G)$. Rezultă că $ab^n aa$ este și în $L(G)$. Contradicție.

Homomorfisme. Dacă $\mathcal{RS}_i$ ar fi închisă la homomorfisme λ -libere atunci, din teorema 8.15, ar rezulta că $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{RS}_i$ ceea ce nu este adevărat.

Intersecție cu limbaje regulate. Limbajul V^* este în $\mathcal{RS}_1$ pentru orice V finit. Deoarece există limbaje regulate care nu sînt în $\mathcal{RS}_\infty$, rezultă că familiile $\mathcal{RS}_i$ nu sînt închise la intersecție cu limbaje regulate.

Homomorfisme inverse. Limbajul $L = \{bc\}$ este în $\mathcal{RS}_1$. Fie homomorfismul $h: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{b, c\}^*$ definit prin $h(a) = \lambda, h(b) = b, h(c) = c$. Atunci $h^{-1}(L) = \{a^n b a^m c a^p \mid n, m, p \geq 0\}$. Se poate vedea că limbajul $h^{-1}(L)$ nu este în familia $\mathcal{RS}_\infty$ (în același mod în care s-a arătat că $\{a^n b a^m c \mid n, m \geq 1\}$ nu este în $\mathcal{RS}_\infty$).

Observația 8.2. Familia $\mathcal{R}\mathcal{S}_1$ este închisă la operația $+$, deci nu este *anti-FAL*. Într-adevăr, fie $G = (V, B, R)$ cu $B \subseteq V_\lambda$, $R \subseteq V \times V_\lambda$. Construim următoarea gramatică de ramificare simplă de ordin 1: $G' = (V, B, R')$ cu $R' = R \cup \{(a, b) \mid (a, \lambda) \in R, b \in B\}$. Incluziunea $L(G)^+ \subseteq L(G')$ este imediată. Invers, fie $x = a_1 \dots a_n \in L(G')$, $a_1 \in B$, $(a_i, a_{i+1}) \in R, i = 1, 2, \dots, \dots, r-1$, $(a_r, a_{r+1}) \notin R$ pentru cel mai mic r . Rezultă că $(a_r, a_{r+1}) \in R' - R$, deci $(a_r, \lambda) \in R$ și $a_{r+1} \in B$. Prin urmare, $a_1 \dots a_r \in L(G)$ și $y = a_{r+1} \dots a_n$ este în $L(G')$. Prin iterarea acestei proceduri obținem o descompunere $x = y_1 y_2 \dots y_k$, $y_i \in L(G)$, deci $L(G') \subseteq L(G)^+$.

Indicații bibliografice. Gramaticile v -contextuale selective au fost introduse în [58] (în [61] ele sînt numite gramatici contextuale cu selecție dublă). Teorema 8.1 este din [70]. Gramaticile v -contextuale simple și cu restricții în derivare apar pentru prima dată aici. Gramaticile contextuale regulate sînt introduse în [60] unde se găsește și teorema 8.7. Gramaticile contextuale (exterioare) cu selectivitate mărginită sînt introduse și studiate în [73], iar în [83] sînt introduse gramaticile contextuale interioare cu selectivitate mărginită. Conținutul secțiunii 8.4 se bazează pe [74].

GRAMATICI n -CONTEXTUALE

În gramaticile contextuale studiate în capitolele anterioare se foloseau contexte în înțelesul obișnuit al cuvântului, de perechi de șiruri. Trecerea de la perechi de șiruri la n -upluri sugerează considerarea unor gramatici generalizate, cu contexte n -dimensionale.

9.1. Puterea generativă a gramaticilor n -contextuale

Definiția 9.1. O gramatică n -contextuală simplă, $n \geq 2$, este un sistem $G = (V, B, C)$ unde V este un vocabular, $B \subseteq V^*$ este un limbaj finit peste V iar C este o mulțime finită de contexte $(n-1)$ -dimensionale peste V , adică $(n-1)$ -upluri $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle$, $u_i \in V^*$. (Le vom numi și $(n-1)$ -contexte.)

Dacă $x, y \in V^*$, atunci definim relația de derivare directă în raport cu G astfel: $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $x = x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in V^*$, $1 \leq i \leq n$, și $y = x_1 u_1 x_2 u_2 \dots x_{n-1} u_{n-1} x_n$ pentru $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C$. Limbajul generat de gramatica G este

$$L(G) = \{x \in V^* \mid \text{există } y \in B \text{ astfel încât } y \stackrel{\star}{\Rightarrow} x\}.$$

Vom nota cu $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 2$, familia limbajelor generate de gramaticile n -contextuale simple și cu $\mathcal{C}(\infty)$ familia tuturor limbajelor generate de asemenea gramatici, adică $\mathcal{C}(\infty) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{C}(n)$.

Se observă imediat că gramaticile 3-contextuale simple se confundă cu gramaticile interioare, prin urmare $\mathcal{C}(3) = \mathcal{I}$.

Definiția 9.2. O gramatică n -contextuală selectivă, $n \geq 2$, este un cuadruplu $G = (V, B, C, \varphi)$ unde V, B, C sînt exact ca într-o gramatică n -contextuală simplă iar $\varphi: (V^*)^n \rightarrow \mathcal{P}(C)$.

Limbajul generat de gramatica G se definește în mod uzual folosind următoarea relație de derivare în raport cu G : pentru $x, y \in V^*$ scriem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $x = x_1 x_2 \dots x_n$, $y = x_1 u_1 x_2 u_2 \dots u_{n-1} x_n$ cu $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Vom nota cu $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, familia limbajelor generate de gramaticile n -contextuale selective și cu $\mathcal{S}(\infty)$ familia tuturor limbajelor generate de asemenea gramatici, adică $\mathcal{S}(\infty) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{S}(n)$. Cînd vom considera numai gramatici efective, adică avînd funcția φ efectiv calculabilă, vom adăuga

indicele c , obținând familiile $\mathcal{S}_c(n)$, respectiv, $\mathcal{S}_c(\infty)$. Gramaticile 3-contextuale din secțiunea 3.5 se confundă cu gramaticile 3-contextuale din definiția anterioară, deci $\mathcal{T} = \mathcal{S}(3)$.

Teorema 9.1. Pentru orice $n \geq 2$ sînt adevărate următoarele incluziuni:

- 1) $\mathcal{C}(n) \subseteq \mathcal{C}(n+1)$, 2) $\mathcal{C}(n) \subseteq \mathcal{S}(n)$, 3) $\mathcal{S}(n) \subseteq \mathcal{S}(n+1)$.

Demonstrație. 1) Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică n -contextuală simplă. Construim gramatica $G' = (V, B, C')$ cu $C' = \{\langle u_1, \dots, u_{n-1}, \lambda \rangle \mid \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C\}$. Egalitatea $L(G) = L(G')$ este evidentă deci $\mathcal{C}(n) \subseteq \mathcal{C}(n+1)$.

2) Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică n -contextuală simplă. Construim gramatica n -contextuală selectivă $G' = (V, B, C, \varphi)$ unde $\varphi: (V^*)^n \rightarrow \mathcal{P}(C)$ este definită prin $\varphi(x_1, \dots, x_n) = C$ pentru orice $x_1, \dots, x_n \in V^*$. Evident, $L(G) = L(G')$ deci $\mathcal{C}(n) \subseteq \mathcal{S}(n)$.

3) Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică n -contextuală selectivă. Construim gramatica $G' = (V, B, C', \varphi')$ unde $C' = \{\langle u_1, \dots, u_{n-1}, \lambda \rangle \mid \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C\}$ iar $\varphi': (V^*)^n \rightarrow \mathcal{P}(C')$ se definește prin

$$\varphi'(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \{\langle u_1, \dots, u_{n-1}, \lambda \rangle \mid \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in$$

$$\in \varphi(x_1, \dots, x_n)\}, \quad x_1, \dots, x_n \in V^*,$$

$$\varphi'(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \emptyset, \quad x_1, \dots, x_{n+1} \in V^*, x_{n+1} \neq \lambda.$$

Din nou egalitatea $L(G) = L(G')$ este imediată și obținem $\mathcal{S}(n) \subseteq \mathcal{S}(n+1)$

Teorema 9.2. Toate incluziunile din teorema 9.1 sînt stricte.

Demonstrație. Vom considera următoarea gramatică $(n+1)$ -contextuală simplă: $G_{n+1} = (\{a_1 a_2, \dots, a_{n+1}\}, \{\lambda\}, C_{n+1})$ cu

$$C_{n+1} = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1} \rangle \mid 1 \leq i \leq n \text{ și}$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}\}.$$

Avem egalitatea $L(G_{n+1}) = \{x \in \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}^* \mid N(a_i, x) = N(a_j, x) \text{ ori care ar fi } 1 \leq i < j \leq n+1\}$.

Incluziunea $\subseteq$ este imediată ținînd seama că orice context din C_{n+1} introduce exact cîte o apariție a fiecărui simbol. Invers, fie $x \in \{a_1, \dots, a_{n+1}\}^*$ cu același număr de apariții ale fiecărui simbol a_i . Există cel puțin un subcuvînt $a_p a_q$, $p \neq q$ în x . Să identificăm cîte o apariție a fiecărui simbol a_r , $r \neq p$, $r \neq q$, în șirul x . Fie $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, a_p a_q, a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_n}$ ordinea simbolurilor identificate, inclusiv a subșirului $a_p a_q$. Contextul $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_p a_q, a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_n} \rangle$ este în C_{n+1} . Evident, dacă y este șirul obținut din x ștergînd acest context, avem $y \Rightarrow x$ și $|y| < |x|$. Continuînd în felul acesta, ajungem să eliminăm toate simbolurile din x , deci ajungem la șirul $\lambda \in B$ și astfel obținem o derivare a lui x în raport cu gramatica G_{n+1} . În concluzie, $x \in L(G_{n+1})$ și egalitatea este demonstrată.

Limbajul $L(G_{n+1})$ nu este în $\mathcal{S}(n)$. Conform incluziunilor din teorema 9.1, va rezulta că $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{C}(n+1)$ și $\mathcal{S}(n) \subset \mathcal{S}(n+1)$ sînt incluziuni stricte.

Fie $G = (V, B, C, \varphi)$, o gramatică n -contextuală selectivă care generează limbajul $L(G_{n+1})$. Notăm

$$M(C) = \max \{|u_i| \mid \text{există un } (n-1)\text{-context } \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \text{ în } C\}.$$

Considerăm următoarele șiruri din $L(G_{n+1})$:

$$x = a_1^p a_2^r a_1^p a_3^r \dots a_n^r a_{n+1}^r a_1^{r-np}, \quad p > M(C), \quad r > M(C).$$

Există o infinitate de asemenea șiruri în limbajul $L(G_{n+1})$. Dacă $L(G) = L(G_{n+1})$, atunci numai un număr finit dintre aceste șiruri pot fi în B , celelalte fiind derivate cu folosirea efectivă a unor $(n-1)$ -contexte din C . Fie un șir x ca mai sus și fie $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C$ ultimul $(n-1)$ -context folosit în derivarea sa în raport cu gramatica G . Șirul $u_1 u_2 \dots u_{n-1}$ trebuie să conțină în derivarea sa în raport cu simbolurilor a_i , $1 \leq i \leq n+1$. Deoarece numere egale de apariții ale tuturor simbolurilor a_i , $1 \leq i \leq n+1$. Deoarece $|u_j| \leq p$, $|u_j| \leq r$ pentru orice $j = 1, 2, \dots, n-1$, rezultă că fiecare șir u_j conține apariții a cel mult două simboluri. Ținând seama de forma șirului x , rezultă că fiecare u_j poate conține apariții ale lui a_1 și ale unui simbol a_r , $r \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Prin urmare, cele $n-1$ șiruri u_j pot conține apariții a cel mult n simboluri a_r , $r \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Fie a_s simbolul care nu apare în $u_1 u_2 \dots u_{n-1}$. Șirul din care a fost derivat x conține deci mai multe apariții ale simbolului a_s decât ale celorlalte simboluri. Acest șir nu poate fi în limbajul $L(G_{n+1})$. Gramaticile G și G_{n+1} nu pot fi echivalente, deci $L(G_{n+1})$ nu este în $\mathcal{S}(n)$.

În teorema 9.5 vom demonstra că $\mathcal{C}(\infty) \subset \mathcal{S}_1$ iar teorema 9.7 implică faptul că $\mathcal{S}(2)$ conține limbaje negramatizabile Chomsky (iar $\mathcal{S}_c(2)$ conține limbaje nedependente de context). Va rezulta astfel că orice incluziune $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, este strictă.

Corolar. Orice pereche $(\mathcal{C}(m), \mathcal{S}(n))$, $m > n \geq 2$, precum și $(\mathcal{C}(\infty), \mathcal{S}(n))$, $n \geq 2$, conține familii incomparabile.

Într-adevăr, $\mathcal{C}(m+1) - \mathcal{S}(m) \neq \emptyset$, dar $\mathcal{S}(2) - \mathcal{C}(\infty) \neq \emptyset$.

Teorema 9.3. Toate familiile $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 2$, $\mathcal{C}(\infty)$ sînt incomparabile cu oricare dintre familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$.

Demonstrație. Fie gramatica contextuală simplă $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle \lambda, b \rangle\})$. Limbajul $L(G) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ nu este în $\mathcal{C}(\infty)$. Într-adevăr, fie $G' = (V, B, C)$ o gramatică n -contextuală simplă care îl generează pe $L(G)$ și fie $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C$ cu $|u_1 \dots u_{n-1}| > 0$ un $(n-1)$ -context în care apare simbolul a și fie $\langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle \in C$ cu $|v_1 v_2 \dots v_{n-1}| > 0$ un $(n-1)$ -context în care apare simbolul b . Fie x un șir din $L(G')$. Orice șir de forma $x(v_1 \dots v_{n-1})^q (u_1 \dots u_{n-1})^p$, $p, q \geq 1$, este în $L(G')$, dar nu este și în $L(G)$. Prin urmare, $L(G) \neq L(G')$ deci $\mathcal{C} - \mathcal{C}(\infty) \neq \emptyset$.

Pentru a completa demonstrația este suficient să găsim un limbaj în $\mathcal{C}(2)$ care nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. Fie gramatica 2-contextuală simplă $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle ab \rangle\})$. Se poate demonstra ușor că $L(G) = D$ (limbajul lui Dyck peste vocabularul $\{a, b\}$). Limbajul D nu este însă în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. Într-adevăr, fie $G' = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă care-l generează pe D și fie șirurile $a^n b^n a^n b^n$ din D . Există o infinitate de asemenea șiruri în D , deci există șiruri de acest fel care folosesc contexte din C . Dacă n este suficient de mare, atunci ultimul context folosit în generarea șirului $a^n b^n a^n b^n$ este de forma $\langle a^k, b^j \rangle$, $k, j \geq 0$, $k + j > 0$. Șirul $a^{n-k} b^n a^n b^{n-j}$ nu mai este însă în D . Prin urmare, limbajul D nu poate fi generat de gramatica G' , deci $D \notin \mathcal{S}$.

Fie și $G' = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată care-l generează pe D . Considerăm șirurile $a^n b^n a^n b^n a^n b^n$. Pentru n arbitrar de mare, orice context folosit în derivarea acestor șiruri va avea forma $\langle u, v \rangle$, $|u| < n$, $|v| < n$. Cel mult un singur subșir de forma a^i sau b^i poate fi obținut cu ajutorul șirurilor din B_2 , restul subșirurilor fiind obținute cu ajutorul contextelor. Derivarea șirului anterior trebuie să folosească deci cel puțin un context de forma $\langle b^i, v \rangle$ cu $i > 0$, sau cel puțin un context de forma $\langle u, a^i \rangle$ cu $i > 0$. Rezultă că gramatica G' poate genera șiruri de forma xa , $x \in \{a, b\}^*$, sau de forma bx , $x \in \{a, b\}^*$. Asemenea șiruri nu sînt în limbajul D , deci $D \neq L(G')$ și $D \notin \mathcal{G}$.

Teorema 9.4. Familia $\mathcal{L}_3$ este incomparabilă cu toate familiile $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 2$, $\mathcal{C}(\infty)$; familia $\mathcal{L}_2$ este incomparabilă cu $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 3$, și cu $\mathcal{C}(\infty)$, dar include strict pe $\mathcal{C}(2)$.

Demonstrație. Limbajul $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ din demonstrația teoremei 9.3 este regulat dar nu este în $\mathcal{C}(\infty)$. Pe de altă parte, $D \in \mathcal{C}(2)$. Limbajul lui Dyck nu este însă regulat. Conform teoremei 3.7, $\mathcal{J} = \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$. Deoarece $\mathcal{J} = \mathcal{C}(3)$, rezultă că $\mathcal{C}(n) - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$ pentru orice $n \geq 3$. Trebuie deci să mai demonstrăm că $\mathcal{C}(2) \subseteq \mathcal{L}_2$. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică 2-contextuală simplă, contextele din C fiind de forma $\langle u \rangle$, $u \in V^*$. Construim următoarea gramatică independentă de context: $G' = (V_N, V, S, P)$, cu $V_N = \{S, T\}$, și

$$P = \{S \rightarrow x \mid x \in B\} \cup \{S \rightarrow Tx_1Tx_2 \dots Tx_pT \mid x_1x_2 \dots x_p \in B,$$

$$x_1, \dots, x_p \in V^*\} \cup \{T \rightarrow \lambda\} \cup \{T \rightarrow Tu_1Tu_2 \dots Tu_pT \mid \langle u_1u_2 \dots u_p \rangle \in C,$$

$$u_1, \dots, u_p \in V^*\}.$$

Avem egalitatea $L(G) = L(G')$. Într-adevăr, folosirea unei reguli $T \rightarrow Tu_1Tu_2 \dots Tu_pT$ este echivalentă cu folosirea 1-contextului $\langle u_1u_2 \dots u_p \rangle$. Prezența simbolului T în orice poziție a șirului curent face posibilă inserarea de 1-contexte în orice poziție, așa cum se face și într-o gramatică 2-contextuală simplă. Rezultă că $L(G) \in \mathcal{L}_2$ și teorema este demonstrată.

Teorema 9.5. Familia $\mathcal{C}(\infty)$ este strict inclusă în $\mathcal{L}_1$.

Demonstrație. Deoarece există limbaje regulate care nu sînt în familia $\mathcal{C}(\infty)$ (teorema 9.4), rezultă că este suficient să demonstrăm incluziunea $\mathcal{C}(\infty) \subseteq \mathcal{L}_1$. Pentru aceasta, vom modifica demonstrația teoremei 3.9. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică n -contextuală simplă, $n \geq 3$ (pentru $n = 2$, avem $\mathcal{C}(2) \subset \mathcal{L}_2$, deci acest caz este rezolvat). Presupunem că $C = \{\langle u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)} \rangle \mid i = 1, 2, \dots, m\}$. Construim gramatica $G' = (V_N, V, S, P)$ cu

$$V_N = \{S, T\} \cup \{A_j^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 2, 3, \dots, n-1\},$$

$$P = \{S \rightarrow Tx \mid x \in B\} \cup \{Ta \rightarrow aT, aT \rightarrow Ta \mid a \in V\} \cup$$

$$\cup \{T \rightarrow u_1^{(i)}A_2^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, m\} \cup$$

$$\cup \{A_j^{(i)}a \rightarrow aA_j^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 2, 3, \dots, n-1, a \in V\} \cup$$

$$\cup \{A_j^{(i)} \rightarrow u_j^{(i)}A_{j+1}^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 2, 3, \dots, n-2\} \cup$$

$$\cup \{A_{n-2}^{(i)} \rightarrow u_{n-1}^{(i)}T \mid i = 1, 2, \dots, m\} \cup \{T \rightarrow \lambda\}.$$

Egalitatea $L(G) = L(G')$ este evidentă, deci $\mathcal{C}(\infty) \subseteq \mathcal{L}_1$.

Teorema 9.6. Familia $\mathcal{S}(2)$ este incomparabilă cu $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, dar $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$ sînt strict incluse în $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 3$.

Demonstrație. A doua afirmație rezultă din teorema 3.16 ($\mathcal{G} \cup \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$) și din egalitatea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(3)$. Pe de altă parte, limbajul $L = \{ab^na \mid n \geq 0\}$ este în $\mathcal{S}(2)$ (este generat de gramatica 2-contextuală selectivă $G = (\{a, b\}, \{aa\}, \{\langle b \rangle\}, \varphi)$ cu $\varphi(ab^n, a) = \{\langle b \rangle\}$, $n \geq 0$, $\varphi(x, y) = \emptyset$ în alte cazuri), dar nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$ (nu are proprietățile K și K'). Invers, limbajul $L' = \{a^ncb^n \mid n \geq 0\}$ este în $\mathcal{C}$ (deci și în $\mathcal{G}$ și $\mathcal{S}$), dar nu este în $\mathcal{S}(2)$. Într-adevăr, fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică 2-contextuală selectivă pentru limbajul L' . Mulțimea B conține numai șiruri de forma a^icb^i , $i \geq 0$. De la asemenea șiruri nu se pot obține alte șiruri din limbajul L' prin adăugarea de 1-contexte. Nu putem avea deci egalitatea $L(G) = L'$.

Teorema 9.7. Orice limbaj se poate scrie ca imaginea homomorfică a intersecției unui limbaj din $\mathcal{S}(2)$ cu un limbaj regulat.

Demonstrație. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj oarecare și fie c un simbol nou. Ca în demonstrația teoremei 3.10, construim gramatica 2-contextuală selectivă $G = (V \cup \{c\}, \{\lambda\}, C, \varphi)$ cu $C = \{\langle a \rangle \mid a \in V\} \cup \{\langle c \rangle\}$ și

$$\varphi(x, \lambda) = \{\langle a \rangle \mid a \in V\}, \text{ pentru } x \in V^* - L,$$

$$\varphi(x, \lambda) = C \text{ pentru } x \in L,$$

$$\varphi(x, y) = \emptyset \text{ pentru alte șiruri.}$$

Considerăm și homomorfismul h definit prin $h(a) = a$, $a \in V$, $h(c) = \lambda$. Fie limbajul regulat $R = V^*\{c\}$. Avem evident egalitatea $L(G) = V^* \cup L\{c\}$, deci $L = h(L(G) \cap R)$.

Corolar. Familia $\mathcal{S}(2)$ conține limbaje nerecursiv enumerabile, iar $\mathcal{S}_c(2)$ conține limbaje nedependente de context.

Afirmațiile rezultă din construcția anterioară pentru L ales convenabil (vezi și primul corolar al teoremei 3.10 și teorema 3.12). Cu o demonstrație identică celei a teoremei 3.11, rezultă

Teorema 9.8. $\mathcal{S}_c(\infty) \subset \mathcal{L}_{rec}$, incluziune strictă.

Teorema 9.9. 1) Sînt adevărate următoarele incluziuni stricte: $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{S}(2)$, $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{S}(3)$. 2) Familia $\mathcal{L}_2$ este incomparabilă cu $\mathcal{S}(2)$. 3) Familia $\mathcal{L}_1$ este incomparabilă cu $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, și cu $\mathcal{S}(\infty)$.

Demonstrație. Incluziunea $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{S}(3)$ rezultă în urma teoremei 3.18. Fie $L \in \mathcal{L}_3$, $L \subseteq V^*$. Conform lemei uvx pentru limbajele regulate, există constantele p, q astfel încît oricare ar fi $z \in L$, $|z| > p$, putem scrie $z = uvx$, $|v| \leq q$, astfel încît $ux \in L$. Fie p, q fixați pentru limbajul L cu aceste proprietăți; construim gramatica 2-contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ cu

$$B = \{x \in V^* \mid |x| \leq p\},$$

$$C = \{\langle x \rangle \mid x \in V^*, |x| \leq q\},$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \{\langle z \rangle \mid x_1zx_2 \in L\}, \quad x_1, x_2 \in V^*.$$

Egalitatea $L(G) = L$ este evidentă, deci $L_3 \subseteq \mathcal{S}(2)$.

Deoarece familia $\mathcal{S}(2)$ conține limbaje neindependente de context, pentru a completa demonstrația punctelor 1 și 2 este suficient să găsim un limbaj independent de context care nu este în $\mathcal{S}(2)$. Un asemenea limbaj este limbajul L' din demonstrația teoremei 9.6. În sfârșit, $\mathcal{S}(2) - \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$ (corolarul teoremei 9.7), dar orice limbaj din $\mathcal{S}(\infty)$ are proprietatea A din secțiunea 3.1. Deoarece există limbaje dependente de context care nu au această proprietate, rezultă că $\mathcal{L}_1 - \mathcal{S}(\infty) \neq \emptyset$ și demonstrația este completă.

Să examinăm acum relațiile dintre familiile de limbaje n -contextuale și familiile de limbaje matriciale. Problema deschisă P3 din finalul secțiunii 3.4 trebuie completată cu problema relațiilor dintre familiile $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 3$, și $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{SM}$, $\mathcal{M}$. (Evident, $\mathcal{SMR}$ conține limbaje care nu sînt în $\mathcal{C}(\infty)$.)

În [29] se demonstrează următoarea lema, generalizare a lemei lui Bar-Hillel la limbajele simplu matriciale.

Lema 9.1. Oricare ar fi $L \subseteq V^*$, $L \in \mathcal{SM}(n)$, $n \geq 1$, există întregii p și q astfel încît oricare ar fi $z \in L$, $|z| > p$, putem scrie $z = u_1 v_1 w_1 x_1 u_2 \dots u_n v_n w_n x_n u_{n+1}$, unde $|v_1 w_1 x_1 \dots v_n w_n x_n| \leq q$, $|v_1 x_1 \dots v_n x_n| > 0$ și pentru orice $i \geq 1$, $z = u_1 v_1^i w_1 x_1^i u_2 \dots u_n v_n^i w_n x_n^i u_{n+1}$ este în L .

La baza demonstrației din [29] stă lema lui Bar-Hillel pentru limbajele independente de context. Folosind lema lui Bar-Hillel cu $i \geq 0$ se poate obține afirmația din lema 9.1 pentru $i \geq 0$. Cazul $i = 0$ conduce la următoarea consecință.

Corolar. Pentru orice limbaj simplu matricial de ordin n , $L \subseteq V^*$, există întregii p , q astfel încît pentru orice $z \in L$, $|z| > p$, există $z' \in L$ astfel încît $z' = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_{2n} v_{2n} u_{2n+1}$, $z' = u_1 u_2 \dots u_{2n+1}$ și $0 < |v_1 v_2 \dots v_{2n}| \leq q$.

Teorema 9.10. Pentru orice $n \geq 1$ avem incluziunea strictă $\mathcal{SM}(n) \subset \mathcal{S}_c(2n+1)$; $\mathcal{S}(2)$ este incomparabilă cu $\mathcal{SM}(n)$ și $\mathcal{SM}$.

Demonstrație. Fie $L \in \mathcal{SM}(n)$, $L \subseteq V^*$, și fie p, q constantele din corolarul anterior. Construim următoarea gramatică $(2n+1)$ -contextuală selectivă: $G = (V, B, C, \varphi)$ unde

$$B = \{x \in L \mid |x| \leq p\},$$

$$C = \{\langle u_1, \dots, u_{2n} \rangle \mid u_1, \dots, u_{2n} \in V^*, |u_1 u_2 \dots u_{2n}| \leq q\},$$

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) =$$

$$= \{\langle u_1, u_2, \dots, u_{2n} \rangle \in C \mid x_1 u_1 \dots x_{2n} u_{2n} x_{2n+1} \in L\}, x_1, x_2, \dots, x_{2n+1} \in V^*.$$

Evident, $L(G) \subseteq L$. Invers, conform corolarului anterior, oricare ar fi $z \in L$ cu $|z| > p$ există $z_1, z_2, \dots, z_r \in L$ astfel încît $z_r = z$, $|z_1| \leq p$ și $z_i = x_1^{(i)} x_2^{(i)} \dots x_{2n+1}^{(i)}$, $z_{i+1} = x_1^{(i)} u_1^{(i)} \dots x_{2n}^{(i)} u_{2n}^{(i)} x_{2n+1}^{(i)}$, $|u_1^{(i)} \dots u_{2n}^{(i)}| \leq q$. Prin urmare, $z_1 \in B$ și $z_1 \Rightarrow z_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow z_r = z$ este o derivare corectă în raport cu gramatica G , deci $z \in L(G)$. Dacă $|z| \leq p$, atunci, evident, $z \in L(G)$, deci avem $L(G) = L$. Funcția φ construită mai sus este calculabilă algoritmic ($\mathcal{SM} \subset \mathcal{L}_{rec}$), prin urmare, obținem $\mathcal{SM}(n) \subseteq \mathcal{S}_c(2n+1)$.

Incluziunea este strictă deoarece familia $\mathcal{S}_c(2)$ conține limbaje nedependente de context (corolarul teoremei 9.7), în timp ce $\mathcal{SM} \subset \mathcal{L}_1$ [29]. Prin urmare, $\mathcal{S}(2) - \mathcal{SM} \neq \emptyset$. Deoarece $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{SM}$ [29], dar există limbaje liniare care nu sînt în $\mathcal{S}(2)$ (demonstrația teoremei 9.6), rezultă că familia $\mathcal{S}(2)$ este incomparabilă cu $\mathcal{SM}(n)$ și $\mathcal{SM}$.

Teorema 9.11. Pentru orice $n \geq 1$, familiile $\mathcal{SM}(n)$ și $\mathcal{S}_c(m)$, $2 \leq m \leq 2n$ sînt incomparabile.

Demonstrație. După cum s-a remarcat mai sus, $\mathcal{S}_c(2) - \mathcal{SM} \neq \emptyset$. Pe de altă parte, limbajul $L_n = \{(a^i b)^{2n} \mid i \geq 1\}$ este în $\mathcal{SM}(n)$ deoarece este generat de gramatica simplu matricială de ordin n cu matricile următoare:

$$\begin{aligned} \{S &\rightarrow AbA_2b \dots A_nb\}, \\ (A_1 &\rightarrow aA_1a, \dots, A_n \rightarrow aA_na), \\ (A_1 &\rightarrow aba, \dots, A_n \rightarrow aba). \end{aligned}$$

Acest limbaj nu este totuși în familia $\mathcal{S}(2n)$. Într-adevăr, fie $z = (a^i b)^{2n} \in L_n$ cu i arbitrar de mare. Nu putem scoate din z $2n-1$ subșiruri de lungime limitată astfel încît să obținem un alt șir din L_n . Nici o gramatică $2n$ -contextuală nu poate deci genera acest limbaj, prin urmare, $L_n \notin \mathcal{S}(2n)$ și teorema este demonstrată.

Teoreme asemănătoare se pot obține pentru familiile de limbaje simplu matriciale regulate. Într-adevăr, folosind lema uvx pentru limbaje regulate, în [29] se demonstrează următorul rezultat.

Lema 9.2. Pentru orice limbaj $L \in \mathcal{SMR}(n)$ există p și q astfel încît orice șir $z \in L$, $|z| > p$, se poate scrie sub forma $z = x_1 u_1 x_2 \dots x_n u_n x_{n+1}$ cu $0 < |u_1 u_2 \dots u_n| \leq q$ și pentru orice $i \geq 0$, $x_1 u_1^i x_2 \dots x_n u_n^i x_{n+1} \in L$.

Din nou, pentru $i = 0$ obținem

Corolar. Pentru orice limbaj $L \in \mathcal{SMR}(n)$ există întregii p și q astfel încît pentru orice $z \in L$, $|z| > p$, există $z' \in L$ astfel încît $z' = x_1 x_2 \dots x_{n+1}$, $z = x_1 u_1 x_2 u_2 \dots x_n u_n x_{n+1}$ și $0 < |u_1 u_2 \dots u_n| \leq q$.

Folosind acest corolar obținem

Teorema 9.12. Pentru orice $n \geq 1$, $\mathcal{SMR}(n) \subset \mathcal{S}(n+1)$.

Teorema 9.13. Pentru orice $n \geq 2$, familia $\mathcal{SMR}(n)$ este incomparabilă cu $\mathcal{S}(n)$, $2 \leq m \leq n$.

Demonstrație. $\mathcal{S}(2) - \mathcal{SM} \neq \emptyset$, deci este suficient să găsim un limbaj în $\mathcal{SMR}(n)$ care nu este în $\mathcal{S}(n)$. Un asemenea limbaj este $L_n = \{(a^i b)^n \mid i \geq 1\}$ care nu este în $\mathcal{S}(n)$, dar poate fi generat cu gramatica simplu matricială regulată de ordin n cu matricile următoare:

$$\begin{aligned} (S &\rightarrow A_1 b A_2 b \dots A_n b), \\ (A_1 &\rightarrow a A_1, \dots, A_n \rightarrow a A_n), \\ (A_1 &\rightarrow a, \dots, A_n \rightarrow a). \end{aligned}$$

Relația dintre familia $\mathcal{M}_f$ și $\mathcal{S}(\infty)$ rămîne o problemă deschisă (P19). Evident, $\mathcal{S}(2)$ conține limbaje care nu sînt în $\mathcal{M}_f$. Pe de altă parte, oricare ar fi n , există un limbaj $L \in \mathcal{M}_f - \mathcal{S}(n)$. De pildă, limbajul $L_n = \{(a^i b)^n \mid i \geq 1\}$ din demonstrația teoremei anterioare este în $\mathcal{SMR}$ și $\mathcal{SMR} \subset \mathcal{M}_f$. Prin urmare, familia $\mathcal{M}_f$ este incomparabilă cu fiecare dintre familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$. Credem că este adevărată incluziunea $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{S}(\infty)$.

9.2. Proprietăți ale familiilor de limbaje n -contextuale

Să considerăm mai întâi câteva condiții necesare (uneori și suficiente) pentru ca un limbaj să fie n -contextual.

Lema 9.3. Orice limbaj din familia $\mathcal{C}(\infty)$ este echivalent în litere cu un sublimbaj regulat al său.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică n -contextuală simplă, $n \geq 2$. Fie limbajul finit $L(C) = \{u_1 u_2 \dots u_{n-1} \mid \langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C\}$. Considerăm limbajul $R = BL(C)^*$. Evident, acest limbaj este regulat și este inclus în $L(G)$. Fie o derivare în raport cu gramatica G folosind un șir $x \in B$ și $(n-1)$ -contextele $\langle u_1^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)} \rangle \in C$, $i = 1, 2, \dots, p$. Șirul produs de această derivare este echivalent în litere cu șirul $z = x u_1^{(1)} \dots u_{n-1}^{(1)} u_1^{(2)} \dots u_{n-1}^{(2)} \dots u_1^{(p)} \dots u_{n-1}^{(p)}$ (șirul z este o permutare a șirului produs de derivare). Deoarece $z \in R$, lema este demonstrată.

Lema 9.4. Un limbaj $L \subseteq V^*$ este în $\mathcal{P}(n)$ dacă și numai dacă are următoarea proprietate: există întregii p și q astfel încât oricare ar fi $z \in L$, $|z| > p$, putem scrie $z = x_1 u_1 x_2 \dots x_{n-1} u_{n-1} x_n$ cu $x_i, u_i \in V^*$ pentru orice i și $x_1 x_2 \dots x_n \in L$, $0 < |u_1 u_2 \dots u_{n-1}| \leq q$.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică n -contextuală selectivă de ordin n . Fie

$$p = \max \{|x| \mid x \in B\},$$

$$q = \max \{|u_1 u_2 \dots u_{n-1}| \mid \langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C\}.$$

Fie $z \in L(G)$, $|z| > p$. Deoarece $z \notin B$, rezultă că există o derivare efectivă a lui z în raport cu gramatica G . Fie $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle$ ultimul context diferit de $\langle \lambda, \dots, \lambda \rangle$ folosit în derivarea lui z . Prin urmare, $z = x_1 u_1 x_2 \dots x_{n-1} u_{n-1} x_n$ și, evident, $x_1 x_2 \dots x_n \in L(G)$, $0 < |u_1 \dots u_{n-1}| \leq q$. Invers, fie $L \subseteq V^*$ un limbaj pentru care există p și q cu proprietățile din enunț. Construim mulțimile

$$B = \{x \in V^* \mid |x| \leq p, x \in L\},$$

$$C = \{\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \mid u_1, \dots, u_{n-1} \in V^*, |u_1 u_2 \dots u_{n-1}| \leq q\}.$$

Considerăm și funcția $\varphi: (V^*)^n \rightarrow \mathcal{P}(C)$ definită prin

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C \mid x_1 u_1 x_2 \dots u_{n-1} x_n \in L\}.$$

Gramatica $G = (V, B, C, \varphi)$ generează evident limbajul L și astfel demonstrația este completă.

Vom preciza în continuare câteva proprietăți de închidere la operații cu limbaje ale familiilor de limbaje n -contextuale.

Teorema 9.14. Familiile $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{C}(\infty)$ nu sînt închise la reuniune, concatenare, închidere Kleene, intersecție cu limbaje regulate, substituție.

Demonstrație. Limbajele $L_1 = \{a^n \mid n \geq 1\}$, $L_2 = \{b^n \mid n \geq 1\}$ sînt în familia $\mathcal{C}(2)$, dar limbajul $L_1 \cup L_2$ nu este în $\mathcal{C}(\infty)$ și nici $L_1 L_2$. Fie $G = (\{a, b, c\}, \{a\}, \{\langle bc \rangle\})$ o gramatică 2-contextuală simplă. Evident, $L(G) = \{x a y \mid x, y \in D_{bc}\}$, D_{bc} fiind limbajul lui Dyck peste vocabularul $\{b, c\}$. Să

presupunem că există o gramatică $G' = (V, B, C)$ n -contextuală simplă pentru limbajul $L(G)^*$. Limbajul $L(G)^*$ conține șiruri cu un număr arbitrar de mare de apariții ale simbolului a . Trebuie deci să existe un $(n-1)$ -context de apariții ale simbolului a . Fie un șir $b^i c^i a$ din $L(G)$ cu i arbitrar de mare; cu contextul anterior putem deriva șirul $b^i u_1 u_2 \dots u_{n-1} c^i a$ care este deci în $L(G')$, dar nu poate fi în limbajul $L(G)^*$. Am obținut astfel neînchiderea de operația $*$. Deoarece $V^* \in \mathcal{C}(2)$ pentru orice V , dar există limbae regulate care nu sînt în familia $\mathcal{C}(\infty)$, rezultă că familiile din enunț nu sînt închise la intersecție cu limbae regulate. Neînchiderea la reuniune implică neînchiderea la substituție (limbajul $\{a, b\}$ este în $\mathcal{C}(2)$).

Teorema 9.15. *Familiile $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{C}(\infty)$ sînt închise la substituții finite și răsturnare.*

Demonstrație. Se modifică adecvat demonstrația teoremei 4.4 (pentru substituții finite). Închiderea la răsturnare este evidentă.

Familiile $\mathcal{C}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{C}(\infty)$ nu sînt deci nici *FAL*, nici *anti-FAL*. Un rezultat asemănător este valabil pentru familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{S}(\infty)$.

Teorema 9.16. *Familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{S}(\infty)$ sînt închise la substituție.*

Demonstrație. Fie limbajul $L \subseteq V^*$, $V = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $L \in \mathcal{S}(n)$ și fie substituția $s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(U^*)$ astfel încît $s(a_i) \in \mathcal{S}(n)$. Deoarece $L \in \mathcal{S}(n)$, există întregii p și q ca în lema 9.4, iar pentru limbaele $s(a)$ există întregii p_i, q_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Considerăm constantele

$$p_s = p \cdot \max \{p_i \mid 1 \leq i \leq k\},$$

$$q_s = \max \{ \max \{q_i \mid 1 \leq i \leq k\}, q \max \{p_i \mid 1 \leq i \leq k\} \}.$$

Fie $z \in s(L)$ astfel încît $|z| > p_s$. Putem distinge două cazuri:

$$1) z = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}, \quad x_{i_j} \in s(a_{i_j}), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad y = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r} \in L$$

și $|x_{i_j}| \leq p_{i_j}$ pentru orice j . Atunci, deoarece $|z| > p_s$, rezultă că $|y| > p$ deci $y = y_1 u_1 y_2 u_2 \dots y_{n-1} u_{n-1} y_n$, $w = y_1 y_2 \dots y_n \in L$ și $0 < |u_1 u_2 \dots u_{n-1}| \leq q$. Fie $w' = y'_1 y'_2 \dots y'_n$ șirul obținut din w făcînd substituțiile $a_{i_j} \rightarrow x_{i_j}$ pentru toate pozițiile $j = 1, 2, \dots, r$ care apar în w și fie $u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-1}$ șirurile obținute din $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ prin aceleași înlocuiri. Evident, $z = y'_1 u'_1 \dots y'_{n-1} u'_{n-1} y'_n$ și $w' \in s(L)$. Mai mult, $0 < |u'_1 u'_2 \dots u'_{n-1}| \leq q \cdot \max \{p_i \mid 1 \leq i \leq k\} \leq q_s$, deci șirul z satisface condițiile din lema 9.4.

2) $z = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$, $x_{i_j} \in s(a_{i_j})$, $1, 2, \dots, r$, $y = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r} \in L$ și există j astfel încît $|x_{i_j}| > p_{i_j}$. Conform lemei 9.4, șirul x_{i_j} se poate scrie sub forma $x_{i_j} = z_1 u_1 z_2 \dots z_{n-1} u_{n-1} z_n$ astfel încît $x'_{i_j} = z_1 z_2 \dots z_n$ este în $s(a_{i_j})$ și $0 < |u_1 u_2 \dots u_{n-1}| \leq q_{i_j}$. Scriem șirul z sub forma $z = x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} z_1 u_1 z_2 \dots z_{n-1} u_{n-1} z_n x_{i_{j+1}} \dots x_{i_r}$. Șirul $z' = x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} z_1 z_2 \dots z_n x_{i_{j+1}} \dots x_{i_r}$ este evident în $s(L)$. Punem $w_1 = x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} z_1$, $w_2 = z_2, \dots, w_{n-1} = z_{n-1}$, $w_n = z_n x_{i_{j+1}} \dots x_{i_r}$ și obținem $z = w_1 u_1 w_2 \dots w_{n-1} u_{n-1} w_n$, $z' = w_1 w_2 \dots w_n \in s(L)$ astfel încît $0 < |u_1 u_2 \dots u_{n-1}| \leq q_{i_j} \leq \max \{q_i \mid 1 \leq i \leq k\} \leq q_s$. Și în acest caz proprietatea din enunțul lemei 9.4 este verificată. Conform lemei 9.4, rezultă că limbajul $s(L)$ este în familia $\mathcal{S}(n)$ și demonstrația este completă.

Corolar. Familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{S}(\infty)$ sînt închise la homomorfisme arbitrare, reuniune, concatenare, închidere Kleene, dar nu sînt închise la intersecție cu limbaje regulate.

Închiderea la homomorfisme arbitrare (împreună cu teorema 9.7), face ca familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{S}(\infty)$ să nu fie închise la intersecție cu limbaje regulate.

Teorema 9.17. Familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{S}(\infty)$ nu sînt închise la intersecție și complementară.

Demonstrație. Să considerăm următoarele două limbaje:

$$L_1 = \{a\}^+ \{b^n a^n \mid n \geq 1\}^* \{b\}^+,$$

$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}^+.$$

Limbajele $\{a\}$, $\{b\}$ și $\{b^n a^n \mid n \geq 1\}$ sînt în familia $\mathcal{S}(2)$ și, conform corolarului anterior, $\mathcal{S}(2)$ este închisă de operațiile $+$, $*$ și concatenare. Prin urmare, limbajele L_1 , L_2 sînt în familia $\mathcal{S}(2)$. Limbajul

$$L_1 \cap L_2 = \{(a^n b^n)^k \mid n \geq 1, k \geq 1\}$$

nu este însă în $\mathcal{S}(\infty)$. Într-adevăr, fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică n -contextuală selectivă pentru acest limbaj și fie $M(C) = \max \{|u_i| \mid \text{există un } (n-1)\text{-context } \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \text{ în } C\}$. Considerăm un șir $z = (a^r b^r)^k$ cu $r > M(C)$, $k > n$, $z \notin B$. Acest șir trebuie deci derivat în raport cu gramatica G folosind efectiv $(n-1)$ -contexte din C . Din șirul z nu putem însă scoate $n-1$ subșiruri, fiecare de lungime mai mică decît r , astfel încît să obținem un șir din $L_1 \cap L_2$. Limbajul $L_1 \cap L_2$ nu poate fi generat de gramatica G , deci, el nu este în $\mathcal{S}(\infty)$ și demonstrația neînchiderii la intersecție este terminată. Deoarece familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, și $\mathcal{S}(\infty)$ sînt închise la reuniune, rezultă că ele nu sînt închise nici la complementară.

Teorema 9.18. Familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, nu sînt închise la aplicații gsm λ -libere.

Demonstrație. Fie limbajul $L_n = \{(a^m b^m)^{n-1} \mid m \geq 1\}$. Următoarea gramatică n -contextuală selectivă generează acest limbaj:

$$G_n = (\{a, b\}, \{(ab)^{n-1}\}, \{\langle ab, ab, \dots, ab \rangle\}, \varphi)$$

unde

$$\varphi(a^m, b^m a^m, \dots, b^m a^m, b^m) = \{\langle ab, ab, \dots, ab \rangle\}, m \geq 1,$$

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

Să considerăm și gsm-ul $g = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, P, s_0, \{s_1\})$ cu

$$P = \{s_0 a \rightarrow a s_0, s_0 b \rightarrow c b s_1, s_1 b \rightarrow b s_1, s_1 a \rightarrow c a s_0\}.$$

Următoarea egalitate este evidentă:

$$g(L_n) = \{(a^m c b^m c)^{n-2} a^m c b^m \mid m \geq 1\}.$$

Orice şir din limbajul $g(L_n)$ conţine exact $2n-2$ apariţii ale simbolului c . Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică r -contextuală selectivă pentru limbajul $g(L_n)$. Orice şir din B trebuie să fie în limbajul $g(L_n)$, deci conţine exact $2n-3$ apariţii ale simbolului c . Orice context din C care se poate aplica unui şir din B pentru a obţine un şir din $g(L_n)$ trebuie să aibă deci cel puţin $2n-2$ com-
ponente. Rezultă că trebuie ca $r \geq 2n-1$, deci $g(L_n) \notin \mathcal{S}(2n-2)$. Pentru orice $n \geq 2$ avem $n \leq 2n-2$ deci $g(L_n) \notin \mathcal{S}(n)$ şi teorema este demonstrată.

Corolar. Pentru orice $n \geq 2$ există un limbaj $L \in \mathcal{S}(n)$ şi un gsm λ -liber g astfel încît $g(L) \in \mathcal{S}(2n-2)$,

Observaţia 9.1. Evident, toate familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, şi $\mathcal{S}(\infty)$ sînt închise la răsturnare şi la operaţiile de prelungire D , S , C . (De fapt, oricare ar fi $L_1 \in \mathcal{S}(n)$ şi L_2 arbitrar, $D(L_1, L_2)$ poate fi generat astfel: dacă $G = (V, B, C, \varphi)$ generează limbajul L_1 , atunci adăugăm la mulţimea C $(n-1)$ -contextele $\langle a, \lambda, \dots, \lambda \rangle$ şi completăm definiţia aplicaţiei φ cu $\varphi(x, \lambda, \dots, \lambda)$ conţine $\langle a, \lambda, \dots, \lambda \rangle$ dacă şi numai dacă $x = x_1 x_2$ şi $x_2 a \in L_2$.) Problema P5 din finalul capitolului 4 trebuie însă completată cu problema închiderii familiilor $\mathcal{C}(n)$, $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, $\mathcal{C}(\infty)$, $\mathcal{S}(\infty)$ la homomorfisme inverse, $Shuf$, $SShuf$, $Shuf^*$, $SShuf^*$ şi Agg .

În ceea ce priveşte problemele de decizie, rezultatele din capitolul 5, pe de o parte, şi rezultatele negative referitoare la gramaticile independente de context (şi chiar la gramaticile simplu matriciale) pot fi transpuse şi pentru familiile $\mathcal{S}(n)$, $n \geq 3$, $\mathcal{S}(\infty)$. De exemplu, problema trivialităţii este decidabilă pentru orice gramatică n -contextuală (simplă sau selectivă), problema apartenenţei este decidabilă pentru gramaticile n -contextuale simple şi pentru cele selective efective, etc. Limbajul $L(x) = \{ba^k \dots ba^i c x_i \dots x_i \mid k \geq 1, 1 \leq i_j \leq n\}$ nu este însă în $\mathcal{S}(2)$, prin urmare, demonstraţiile din capitolul 5 nu pot fi repetate pentru această familie. Problemele de decizie pentru gramaticile 2-contextuale rămîn deschise (P20) (unele dintre ele au fost investigate în [56]).

9.3. Gramatici n -contextuale condiţionale

După modelul din secţiunea 7.4, putem introduce gramatici n -contextuale condiţionale asociind fiecărui $(n-1)$ -context o mulţime precizată de n -upluri care pot fi derivate cu ajutorul acestui context. Pentru a face precizări asupra acestor mulţimi de n -upluri avem nevoie de noţiunea de n -limbaj de tip i , $i = 0, 1, 2, 3$. O vom considera în forma din [12].

Definiţia 9.3. O n -gramatică, $n \geq 1$, este un sistem $G = (V_N^{(1)}, V_N^{(2)}, \dots, V_N^{(n)}, V_T^{(1)}, V_T^{(2)}, \dots, V_T^{(n)}, (S_1, S_2, \dots, S_n), P)$ unde $V_N^{(i)}, V_T^{(i)}$ sînt vocabulare (finite şi nevide) astfel încît $V_T^{(i)} \cap V_N^{(i)} = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$, $S_i \in V_N^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, iar P este o mulţime finită de n -reguli, adică de secvenţe de forma $(x_1 \rightarrow y_1, \dots, x_n \rightarrow y_n)$ unde sau $x_i = y_i = \lambda$ sau $x_i \in V_i^* V_i^{(i)} V_i^*$, $y_i \in V_i^* (V_i = V_N^{(i)} \cup V_T^{(i)})$. Pentru două n -upluri $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ cu $z_i, w_i \in V_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, scriem $z \rightarrow y$ dacă şi numai dacă $z_i = u_i x_i v_i$, $w_i = u_i y_i v_i$, $u_i, v_i \in V_i^*$ şi $(x_1 \rightarrow y_1, \dots, x_n \rightarrow y_n) \in P$. Limbajul generat de n -gramatica G este

$$L(G) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (V_T^{(1)})^* \times \dots \times (V_T^{(n)})^* \mid (S_1, S_2, \dots, S_n) \xrightarrow{*} (x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

O n -gramatică este de tip i , $i = 0, 1, 2, 3$, dacă şi numai dacă orice regulă $x \rightarrow y$ din P , $xy \neq \lambda$ este regulă de tip i .

Notăm cu $\mathcal{L}_i^n$, $i = 0, 1, 2, 3$, $n \geq 1$, familia limbajelor generate de n -gramaticile de tip i ; limbajele din $\mathcal{L}_i^n$ se vor numi n -limbaje de tip i . Evident, $\mathcal{L}_i^n \subseteq \mathcal{L}_{i-1}^n$, $i = 1, 2, 3$, $n \geq 1$.

Definiția 9.4. O gramatică n -contextuală i -condițională, $n \geq 2$, $i = 0, 1, 2, 3$, este o pereche (G, φ) unde $G = (V, B, C)$ este o gramatică n -contextuală simplă iar $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}((V^*)^n) \cap \mathcal{L}_i^n$.

Dacă $x = x_1 x_2 \dots x_n$ și $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \varphi(\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle)$ pentru $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C$, atunci scriem $x \Rightarrow x_1 u_1 x_2 \dots x_{n-1} u_{n-1} x_n$. Limbajul generat de gramatica (G, φ) este atunci

$$L(G, \varphi) = \{x \in V^* \mid y \stackrel{\star}{\Rightarrow} x \text{ pentru un șir } y \in B\}.$$

Vom nota cu $\mathcal{C}_i(n)$ familia limbajelor generate de gramaticile n -contextuale i -condiționale, $n \geq 2$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Teorema 9.19. Sînt adevărate următoarele relații: 1) $\mathcal{C}_i(n) \subset \mathcal{C}_i(n+1)$, $n \geq 2$, $i = 0, 1, 2, 3$, 2) $\mathcal{C}_i(n) \subseteq \mathcal{C}_{i-1}(n)$, $n \geq 2$, $i = 1, 2, 3$, 3) $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{C}_3(n)$, $n \geq 2$, 4) $\mathcal{C}_0(n) \subset \mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$.

Demonstrație. 1) Fie $G = (V, B, C)$, $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}((V^*)^n)$ o gramatică n -contextuală i -condițională. Construim gramatica G' ca în demonstrația teoremei 9.1 și extindem aplicația φ la C' astfel

$$\begin{aligned} \varphi'(\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, \lambda \rangle) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \\ &\in \varphi(\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle)\}, \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C. \end{aligned}$$

Egalitatea $L(G, \varphi) = L(G', \varphi')$ este evidentă iar limbajele $\varphi'(\langle u_1, \dots, u_{n-1}, \lambda \rangle)$ sînt de același tip cu $\varphi(\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle)$, deci $L(G, \varphi) \in \mathcal{C}_i(n+1)$.

Fie gramatica $(n+1)$ -contextuală simplă din demonstrația teoremei 9.2. Limbajul $L(G_{n+1})$ este în $\mathcal{C}(n+1)$ deci, conform punctului 3), este în $\mathcal{C}_3(n+1)$ și conform punctului 2) este în orice familie $\mathcal{C}_i(n+1)$, $i = 0, 1, 2, 3$. Acest limbaj nu este însă în $\mathcal{S}(n)$ (demonstrația teoremei 9.2), deci, conform punctului 4), nu este în $\mathcal{C}_0(n)$ și conform punctului 2) nu este nici în $\mathcal{C}_i(n)$, $i = 0, 1, 2, 3$. Punctul 1) este complet demonstrat.

2) Deoarece $\mathcal{L}_i^n \subset \mathcal{L}_{i-1}^n$, $i = 1, 2, 3$, $n \geq 1$, rezultă imediat că $\mathcal{C}_i(n) \subseteq \mathcal{C}_{i-1}(n)$, $i = 1, 2, 3$, $n \geq 2$.

3) Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică n -contextuală simplă. Considerăm și funcția $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}((V^*)^n)$ definită prin $\varphi(\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle) = (V^*)^n$. Evident, $L(G) = L(G, \varphi)$ și obținem $\mathcal{C}(n) \subseteq \mathcal{C}_3(n)$, $n \geq 2$. În teorema următoare se arată că $\mathcal{C}_3(2)$ include strict familia $\mathcal{L}_3$. Deoarece există limbaje regulate care nu sînt în familia $\mathcal{C}(\infty)$, rezultă că incluziunile $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{C}_3(n)$ sînt stricte.

4) Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică n -contextuală simplă și fie $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}((V^*)^n)$. Definim funcția $\varphi: (V^*)^n \rightarrow \mathcal{P}(C)$ prin

$$\begin{aligned} \varphi'(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \{\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \\ &\in \varphi(\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle)\}. \end{aligned}$$

Gramatica n -contextuală selectivă $G' = (V, B, C, \varphi')$ generează evident același limbaj ca (G, φ) , deci $\mathcal{C}_0(n) \subseteq \mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$. Teorema 9.22 de mai

jos afirmă că $\mathcal{C}_0(n) \subset \mathcal{L}_0$ pentru orice n . Deoarece familia $\mathcal{S}(n)$ conține limbaje nerecursiv enumerabile, rezultă că incluziunea $\mathcal{C}_0(n) \subset \mathcal{S}(n)$, $n \geq 2$, este strictă pentru orice n .

Teorema 9.20. Familia $\mathcal{C}_3(2)$ include strict pe $\mathcal{L}_3$, iar $\mathcal{C}_2(3)$ include strict pe $\mathcal{L}_2$.

Demonstrație. Procedăm ca în demonstrația teoremei 9.9. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj regulat și fie p, q constantele din lema de descompunere uvx pentru limbaje regulate. Construim gramatica $G = (V, B, C)$ ca în demonstrația teoremei 9.9 și definim funcția $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}((V^*)^2)$ prin $\varphi(\langle x \rangle) = \{(u, v) \mid uvx \in L\}$, $\langle x \rangle \in C$. Egalitatea $L(G, \varphi)$ este evidentă. Trebuie să demonstrăm că limbajele $\varphi(\langle x \rangle)$ sînt în $\mathcal{L}_3^2$ pentru orice $\langle x \rangle \in C$. Fie $G' = (V_N, V, S, P)$ o gramatică regulată pentru limbajul L . Construim 2-gramatica regulată $G_x = (V_N^{(1)}, V_N^{(2)}, V_T^{(1)}, V_T^{(2)}, (S_1, S_2), P_x)$ unde

$$V_N^{(1)} = V_N \cup \{S_1\}, \quad V_T^{(1)} = V,$$

$$V_N^{(2)} = V_N \cup \{S_2\}, \quad V_T^{(2)} = V,$$

$$\begin{aligned} P_x = & \{S_1 \rightarrow aA, \lambda \rightarrow \lambda \mid S \rightarrow aA \in P\} \cup \\ & \cup \{(A \rightarrow aE, \lambda \rightarrow \lambda) \mid A \rightarrow aE \in P\} \cup \\ & \cup \{(A \rightarrow a, S_2 \rightarrow bF) \mid A \rightarrow aE \in P, E \xrightarrow{\star}_{G'} xD \text{ și } D \rightarrow bF \in P\} \cup \\ & \cup \{(\lambda \rightarrow \lambda, A \rightarrow aE) \mid A \rightarrow aE \in P\} \cup \\ & \cup \{(\lambda \rightarrow \lambda, A \rightarrow a) \mid A \rightarrow a \in P\} \cup \\ & \cup \{S_1 \rightarrow \lambda, S_2 \rightarrow bF \mid S \xrightarrow{\star}_{G'} xD \text{ și } D \rightarrow bF \in P\} \cup \\ & \cup \{(A \rightarrow a, S_2 \rightarrow \lambda) \mid A \rightarrow aE \in P, E \xrightarrow{\star}_{G'} x\} \cup \\ & \cup \{(S_1 \rightarrow \lambda, S_2 \rightarrow \lambda) \mid x \in L\}. \end{aligned}$$

Prima componentă a 2-regulilor din P_x generează șiruri din $\text{Pref}(L)$, a doua componentă generează șiruri din $\text{Suf}(L)$. Generarea unei perechi (x_1, x_2) este posibilă numai dacă $x_1 x x_2 \in L$, deci avem egalitatea $L(G_x) = \varphi(\langle x \rangle)$ și obținem incluziunea $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{C}_3(2)$.

Deoarece familia $\mathcal{C}(2)$ conține limbaje neregulate (teorema 9.4), iar $\mathcal{C}(2) \subset \mathcal{C}_3(2)$, rezultă că $\mathcal{C}_3(2) - \mathcal{L}_3 \neq \emptyset$.

Fie acum $L \subseteq V^*$, $L \in \mathcal{L}_2$ și fie p, q constantele din lema lui Bar-Hillel pentru acest limbaj. Construim gramatica $G = (V, B, C)$ cu

$$B = \{x \in V^* \mid |x| \leq p\}, \quad C = \{\langle u, v \rangle \mid |uv| \leq q, u, v \in V^*\}.$$

Definim funcția $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}((V^*)^3)$ prin

$$\varphi(\langle u, v \rangle) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 u x_2 v x_3 \in L, \langle u, v \rangle \in C\}.$$

Deoarece egalitatea $L(G, \varphi) = L$ este evidentă, este suficient să arătăm că pentru orice $\langle u, v \rangle \in C$ avem $\varphi(\langle u, v \rangle) \in \mathcal{L}_2^3$.

Pentru $u = a_1 a_2 \dots a_r$, $v = b_1 b_2 \dots b_t$, $a_i, b_i \in V$, construim următorul gsm : $g_{u,v} = (K, V_1, V_2, P, s_0, F)$ unde

$$K = \{s_0, s_m, s_f\} \cup \{s_i \mid i = 1, 2, \dots, r-1\} \cup \{s'_i \mid i = 1, 2, \dots, t-1\},$$

$$V_1 = V,$$

$$V_2 = V \cup V' \cup V'' \cup \{c_1, c_2\}, \quad V' = \{a' \mid a \in V\}, \quad V'' = \{a'' \mid a \in V\},$$

$$F = \{s_f\},$$

iar P conține următoarele reguli:

$$1) s_0 a \rightarrow a s_0, \quad a \in V,$$

$$2) s_0 a_1 \rightarrow c_1 s_1,$$

$$s_i a_{i+1} \rightarrow s_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r-2,$$

$$3) s_{r-1} a_r \rightarrow s_m,$$

$$4) s_m a \rightarrow a' s_m, \quad a \in V,$$

$$5) s_m b_1 \rightarrow c_2 s'_1,$$

$$s'_i b_{i+1} \rightarrow s'_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, t-2,$$

$$6) s'_{t-1} b_t \rightarrow s_f,$$

$$7) s_f a \rightarrow a'' s_f, \quad a \in V.$$

Evident, $g_{u,v}(L) = \{x_1 c_1 h'(x_2) c_2 h''(x_3) \mid x_1 u x_2 v x_3 \in L\}$ unde h' este homomorfismul definit prin $h'(a) = a'$, $a \in V$, iar h'' este homomorfismul definit prin $h''(a) = a''$, $a \in V$. Evident, $\varphi(\langle u, v \rangle) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 c_1 h'(x_2) c_2 h''(x_3) \in g_{u,v}(L)\}$. Lema următoare va asigura faptul că $\varphi(\langle u, v \rangle) \in \mathcal{L}_2^3$, deci obținem $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{C}_2(3)$. Incluziunea este strictă deoarece familia $\mathcal{C}(3)$ conține limbaje neindependente de context (teorema 9.4) și $\mathcal{C}(3) \subset \mathcal{C}_2(3)$ (teorema 9.19).

Lema 9.5. Fie $L \subseteq V_1^* \{c_1\} V_2^* \{c_2\} \dots \{c_{n-1}\} V_n^*$, $n \geq 2$, un limbaj independent de context. Atunci, n -limbajul $L_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 c_1 x_2 c_2 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n \in L\}$ este în familia $\mathcal{L}_2^n$.

Demonstrație. În primul rînd, să modificăm vocabularele V_i astfel încît oricare două vocabulare V_i, V_j să fie disjuncte. Acest lucru se poate face cu ajutorul unor homomorfisme bijective $h_i: V_i \rightarrow V'_i$. Făcînd aceste redenumiri asupra lui L vom obține un limbaj L' , de asemenea independent de context. Dacă pentru un asemenea limbaj vom reuși să construim o n -gramatică independentă de context care să genereze limbajul L'_n , atunci cu ajutorul homomorfismelor h^{-1} putem obține și o gramatică pentru limbajul L_n .

Să presupunem deci de la început că vocabularele V_i sînt disjuncte două cîte două. Fie $G = (V_N, V_T, S, P)$, $V_T = \bigcup_{i=1}^n V_i \cup \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\}$,

o gramatică independentă de context pentru limbajul L în forma normală Chomsky, adică cu mulțimea P constituită numai din reguli de forma

$A \rightarrow BC$, $A, B, C \in V_N$, sau de forma $A \rightarrow a$, $a \in V_T$, $A \in V_N$. Construim următoarea n -gramatică independentă de context:

$$G' = (V_N, V_N, \dots, V_N, V_1, V_2, \dots, V_n, (S, S, \dots, S), P')$$

cu mulțimea P' construită astfel.

Fie $A \in V_N$ un neterminal oarecare. Orice șir $x \in V_T^*$ pentru care avem $A \xRightarrow{*} x$ în raport cu G are o configurație de simboluri din V_T bine precizată de către A în sensul că nu există două șiruri x_1, x_2 , $A \xRightarrow{*} x_1$, $A \xRightarrow{*} x_2$ și există simboluri c_i care apar în x_1 și nu apar în x_2 sau invers. (Implicit, vocabularele V_i ale căror simboluri apar în x_1 sînt identice cu vocabularele ale căror simboluri apar în x_2 .)

Fie $A \rightarrow BC$ o regulă neterminală din P . Dacă din BC se pot deriva șiruri din $V_i^* \{c_i\} V_{i+1}^* \dots \{c_{i+s}\} V_{i+s+1}^*$ astfel încît din B se pot genera șiruri din $V_i^* \{c_i\} \dots V_{i+p}^* \{c_{i+p}\} V_{i+p+1}^*$ iar din simbolul C se pot deriva șiruri din $V_{i+p+1}^* \{c_{i+p+1}\} \dots \{c_{i+s}\} V_{i+s+1}^*$, atunci introducem în mulțimea P' n -regula $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ unde $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+s+2}, \dots, r_n$ sînt reguli de forma $\lambda \rightarrow \lambda$, $r_i, r_{i+1}, \dots, r_{i+p}$ sînt de forma $A \rightarrow B$, r_{i+p+1} este de forma $A \rightarrow BC$, iar $r_{i+p+2}, \dots, r_{i+s+1}$ sînt de forma $A \rightarrow C$.

Fie și $A \rightarrow a \in P$, $A \in V_N$, $a \in V_T$. Dacă $a \in V_i$, atunci se introduce în P' n -regula $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ cu r_j de forma $\lambda \rightarrow \lambda$ pentru $j \neq i$ și cu r_i : $A \rightarrow a$. Dacă $a = c_i$, atunci se introduce în P' o n -regulă de forma $(r_1, \dots, r_n)$ cu r_j de forma $\lambda \rightarrow \lambda$ pentru $j \neq i$, $j \neq i+1$ și cu r_i, r_{i+1} de forma $A \rightarrow \lambda$.

Este adevărată egalitatea $L(G') = L_n$.

Într-adevăr, orice derivare în raport cu gramatica G conduce la n derivări în gramatica G' , cîte una pentru fiecare vocabular V_i . Aceste derivări se desfășoară în paralel atunci cînd corespund unei aceleiași reguli din P sau independent dacă se fac cu reguli din P care se pot folosi numai pentru generarea de șiruri $x_i \in V_i^*$. Invers, orice n -regulă din P' corespunde unei reguli din P și simulează aplicarea acesteia prin derivări pe una sau mai multe componente ale n -uplului curent.

Să considerăm un exemplu pentru a vedea cum lucrează gramatica G' . Fie gramatica $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, c_1\}, S, \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb, A \rightarrow c_1, B \rightarrow cc\})$. Evident, $L(G) = \{a^n c_1 b^n c c \mid n \geq 0\}$. O gramatică în forma normală Chomsky echivalentă cu gramatica G este următoarea: $G' = (\{S, A, B, a', b', c', A_1\}, \{a, b, c, c_1\}, S, \{S \rightarrow AB, A \rightarrow a'A_1, A_1 \rightarrow Ab', a' \rightarrow a, b' \rightarrow b, A \rightarrow c_1, B \rightarrow c'c', c' \rightarrow c\})$.

2-gramatica asociată va fi deci $G'' = (\{S, A, B, a', b', c', A_1\}, \{S, A, B, a', b', c', A_1\}, \{a\}, \{b, c\}, (S, S), P)$ unde P conține următoarele 2-reguli: $(S \rightarrow A, S \rightarrow AB)$, $(A \rightarrow a'A_1, A \rightarrow A_1)$, $(A_1 \rightarrow A, A_1 \rightarrow Ab')$, $(a' \rightarrow a, \lambda \rightarrow \lambda)$, $(\lambda \rightarrow \lambda, b' \rightarrow b)$, $(A \rightarrow \lambda, A \rightarrow \lambda)$, $(\lambda \rightarrow \lambda, B \rightarrow c'c')$, $(\lambda \rightarrow \lambda, c' \rightarrow c)$.

Egalitatea $L(G'') = \{a^n, b^n c c\} \mid n \geq 0\}$ este evidentă.

Teorema 9.21. Familia $\mathcal{C}_3(3)$ conține limbaje neindependente de context iar $\mathcal{L}_2$ conține limbaje care nu sînt în $\mathcal{C}_2(2)$.

Demonstrație. Limbajul neindependent de context $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ poate fi generat cu următoarea gramatică 3-contextuală 3-condițională: $G = (\{a, b, c\}, \{abc\}, \{\langle a, bc \rangle\})$,

$$\varphi(\langle a, bc \rangle) = \{a^n, b^n, c^n \mid n \geq 1\}.$$

Într-adevăr, $L = L(G, \varphi)$ și limbajul $\varphi(\langle a, bc \rangle)$ poate fi generat cu 3-gramatica regulată $G' = (\{S\}, \{S\}, \{S\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}, (S, S, S), P)$ cu

$$P = \{(S \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow cS), (S \rightarrow a, S \rightarrow b, S \rightarrow c)\}.$$

Pe de altă parte, există limbaie independente de context care nu sînt în $\mathcal{S}(2)$. Deoarece $\mathcal{C}_2(2) \subset \mathcal{S}(2)$, rezultă că $\mathcal{L}_2 - \mathcal{C}_2(2) \neq \emptyset$.

Problemă deschisă (P21). Nu se știe dacă există limbaie neindependente de context în familia $\mathcal{C}_3(2)$ (deci dacă $\mathcal{C}_3(2) \subseteq \mathcal{L}_2$ sau nu) și nici dacă familia $\mathcal{L}_2$ este inclusă în $\mathcal{C}_2(3)$ sau nu.

Teorema 9.22. Familia $\mathcal{L}_1$ include strict orice familie $\mathcal{C}_1(n)$, $n \geq 2$, iar $\mathcal{L}_0$ include strict pe $\mathcal{C}_0(n)$, $n \geq 2$.

Demonstrație. Fie (G, φ) , $G = (V, B, C)$, $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}((V^*)^n)$ o gramatică n -contextuală 1-condițională cu $C = \{\langle u_1^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)} \rangle \mid i = 1, 2, \dots, k\}$. Fie $G_i = (V_{N_i}^{(i)}, \dots, V_{N_n}^{(i)}, V, (S_1^{(i)}, \dots, S_n^{(i)}), P_i)$ o n -gramatică de tip 1 pentru limbajul $\varphi(\langle u_1^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)} \rangle)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Presupunem că toate vocabularele $V_{N_j}^{(i)}$ sînt două cîte două disjuncte și că $P_i = \{(x_{j1}^{(i)} \rightarrow y_{j1}^{(i)}, \dots, x_{jn}^{(i)} \rightarrow y_{jn}^{(i)}) \mid j = 1, 2, \dots, s_i\}$. Construim gramatica $G' = (V_N, V, S, P')$ unde

$$V_N = \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\} \cup V \times (W \cup V \cup \{b\}) \cup$$

$$\cup \{[i, j, l] \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s_i, 1 \leq l \leq n\} \cup \{S, X, Z, T\} \cup$$

$$\cup \{X_j^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n-1\} \cup$$

$$\cup \{X_i, Y_i, Z_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}, \text{ cu } W = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^n V_{N_j}^{(i)}$$

și cu mulțimea P' formată din următoarele reguli:

$$1) S \rightarrow A_1 X(a_1, b) \dots (a_r, b) A_{n+1}, a_1 a_2 \dots a_r \in B.$$

(Se introduce șirul $(a_1, b) \dots (a_r, b)$ între marcatorii A_1 și A_{n+1} împreună cu simbolul intermediar X .)

$$2) X(a, b) \rightarrow X_i(a, S_1^{(i)}) X_{j+1}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$X_j^{(i)}(a, b) \rightarrow (a, b) X_j^{(i)}, j = 1, 2, \dots, n-1, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$X_j^{(i)}(a, b) \rightarrow A_{j+1}(a, S_{j+1}^{(i)}) X_{j+1}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, \dots, n-1,$$

$$X_{n-1}^{(i)}(a, b) \rightarrow A_n(a, S_n^{(i)}), i = 1, 2, \dots, k, a \in V.$$

(În șirul curent se introduc marcatorii $A_2, \dots, A_n$, separînd șirul în n subșiruri; fiecare dintre aceste subșiruri își schimbă primul simbol în $(a, S_j^{(i)})$ pentru un i fixat. Simbolul X_i va determina o derivare în n -gramatica G pe cele n componente ale șirului dintre A_1 și A_{n+1} .)

$$3) X_i(a, N) \rightarrow (a, N) X_i, a \in V, a \in V, N \in W \cup V \cup \{b\},$$

$$X_i(a_1, \alpha_1) \dots (a_p, \alpha_p) (a_{p+1}, b) \dots (a_q, b) \rightarrow (a_1, \beta_1) \dots (a_q, \beta_q) [i, j, 1],$$

unde $a_1, \dots, a_q \in V$ și $\alpha_1 \dots \alpha_p \rightarrow \beta_1 \dots \beta_q$ este regula de pe poziția 1 în n -regula cu numărul j din mulțimea P_i ,

$$[i, j, l](a, N) \rightarrow (a, N) [i, j, l], a \in V, N \in W \cup V \cup \{b\},$$

$$[i, j, l] A_{l+1} \rightarrow A_{l+1} [i, j, l], l \leq n - 1,$$

$$[i, j, l](a_1, \alpha_1) \dots (a_p, \alpha_p)(a_{p+1}, b) \dots (a_q, b) \rightarrow (a_1, \beta_1) \dots (a_q, \beta_q) [i, j, l + 1],$$

unde $a_1, \dots, a_q \in V$, $\alpha_1 \dots \alpha_p \rightarrow \beta_1 \dots \beta_q$ este regula de pe poziția $l + 1$ din n -regula cu numărul j din mulțimea P_i , $l \leq n - 2$,

$$[i, j, n - 1](a_1, \alpha_1) \dots (a_p, \alpha_p)(a_{p+1}, b) \dots (a_q, b) \rightarrow (a_1, \beta_1) \dots (a_q, \beta_q) Y_i,$$

unde $a_1, \dots, a_q \in V$, $\alpha_1 \dots \alpha_p \rightarrow \beta_1 \dots \beta_q$ este regula de pe poziția n din n -regula cu numărul j din mulțimea P_i ,

$[i, j, l] \rightarrow [i, j, l + 1]$, dacă regula $l + 1$ din n -regula numărul j din mulțimea P_i este de forma $\lambda \rightarrow \lambda$.

(Pe a doua componentă a subșirurilor cuvîntului curent se derivează ca în n -gramatica G_i . Regulile folosite formează o n -regulă a acestei n -gramatici. După ce derivarea cu o n -regulă este terminată, se introduce simbolul Y_i .)

$$4) (a_1, b) (a_2, x) \rightarrow (a_1, x) (a_2, b),$$

$$(a_1, x) (a_2, b) \rightarrow (a_1, b) (a_2, x), a_1, a_2 \in V, x \in W \cup V.$$

(Simbolurile b circulă liber pe a doua componentă.)

$$5) (x, y) Y_i \rightarrow Y_i (x, y), x \in V, y \in W \cup V \cup \{b\},$$

$$A_j Y_i \rightarrow Y_i A_j, j = 2, 3, \dots, n,$$

$$A_1 Y_i \rightarrow A_1 X_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

(Simbolurile Y_i se mișcă spre stînga și reintroduc pe X_i atunci cînd se ajunge la A_1 . În felul acesta, cu regulile 3), se face o nouă derivare în raport cu gramatica G_i .)

$$6) A_1 Y_i \rightarrow A_1 Z_i, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$Z_i(a, a) \rightarrow (a, b) Z_i, a \in V, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$Z_i A_t \rightarrow (a_1, b) \dots (a_m, b) Z_i, a_1 a_2 \dots a_m = u_{t+1}^{(i)}, t = 2, 3, \dots, n, i = 1, 2, \dots, k.$$

(Simbolul Y_i poate introduce pe Z_i care testează dacă n -uplul derivat în gramatica G_i corespunde șirului curent și, în caz afirmativ, introduce în locul

marcatorilor A_j , şirurile $u_{j-1}^{(1)}$, $j = 2, 3, \dots, n$, realizînd astfel o derivare în raport cu gramatica (G, φ) .

$$7) Z_i A_{n+1} \rightarrow Z A_{n+1}, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$(a, b)Z \rightarrow Z(a, b), a \in V,$$

$$A_1 Z \rightarrow A_1 X.$$

(Simbolul Z circulă spre stînga şi reintroduce pe X ; acest simbol va determina folosirea unui nou context din mulţimea C .)

$$8) Z_i A_{n+1} \rightarrow T, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$(a, b)T \rightarrow Ta, a \in V,$$

$$A_1 T \rightarrow \lambda.$$

(Simbolul T determină încheierea derivării.)

$$9) S \rightarrow x, x \in B.$$

(Şirurile din B se obţine direct cu aceste reguli.)

Explicaţiile anterioare fac uşoară verificarea egalităţii $L(G') = L(G, \varphi)$. Gramatica G' are spaţiul de lucru mărginit (în orice derivare se şterg cel mult $n + 2$ simboluri: $n + 1$ simboluri A_i şi o apariţie a simbolului T). Rezultă deci că $L(G, \varphi) \in \mathcal{L}_1$, prin urmare, $\mathcal{C}_1(n) \subseteq \mathcal{L}_1$.

Deoarece există limbaje dependente de context care nu sînt în familia $\mathcal{S}(\infty)$ (teorema 9.9) şi $\mathcal{C}_1(n) \subset \mathcal{S}(n)$ (teorema 9.19), rezultă că incluziunile $\mathcal{C}_1(n) \subset \mathcal{L}_1$ sînt stricte.

Demonstraţia anterioară se poate modifica uşor pentru a proba incluziunea $\mathcal{C}_0(n) \subset \mathcal{L}_0$. (În folosirea regulilor gramaticilor G_i trebuie să prevedem şi cazul în care $|\alpha| > |\beta|$, $\alpha \rightarrow \beta \in P_i$.)

Observaţia 9.2. Familia $\mathcal{C}_0(2)$ conţine limbaje nedependente de context. De exemplu limbajul $V^* \cup L\{c\}$, pentru $L \in \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1$ este în această familie. (Gramatica (G, φ) din demonstraţia teoremei 7.13 în care înclocuim orice context $\langle \lambda, x \rangle$ cu $\langle x \rangle$, generează acest limbaj.) Prin urmare, incluziunea $\mathcal{C}_1(n) \subset \mathcal{C}_0(n)$ este strictă pentru orice $n \geq 2$. Şi incluziunile $\mathcal{C}_3(n) \subset \mathcal{C}_2(n) \subset \mathcal{C}_1(n)$ se dovedesc a fi stricte.

Teorema 9.23. Incluziunile $\mathcal{C}_2(n) \subset \mathcal{C}_1(n)$, $n \geq 2$, sînt stricte.

Demonstraţie. Fie limbajul

$$L = \{a^{2^n}b \mid n \geq 1\} \cup \{a^n \mid n \geq 1\}.$$

Acest limbaj este în familia $\mathcal{C}_1(2)$ deoarece poate fi generat cu gramatica (G, φ) unde $G = (\{a, b\}, \{a\}, \{\langle a \rangle, \langle b \rangle\})$ şi

$$\varphi(\langle a \rangle) = \{(a^n, \lambda) \mid n \geq 1\}, \quad \varphi(\langle b \rangle) = \{(a^{2^n}, \lambda) \mid n \geq 1\}.$$

Să presupunem că $L \in \mathcal{C}_2(n)$ pentru n oarecare. Fie (G', φ') , $G' = (V, B, C)$, o gramatică n -contextuală 2-condiţională care generează limbajul L . Deoa-

rece mulțimea C este finită, de la un șir de forma $a^{2^i}b$ din B nu se pot obține decât un număr finit de șiruri din L (lungimile șirurilor $a^{2^i}b$ cresc cu salturi arbitrar de mari). Rezultă că există un $(n-1)$ -context $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C$ care conține o apariție a simbolului b . Fie L_0 n -limbajul asociat de funcția φ acestui $(n-1)$ -context. Intersectăm acest n -limbaj cu n -limbajul regulat $(\{a\}^*)^n$. Obținem un nou n -limbaj independent de context peste vocabularul $\{a\}$. Să-l notăm cu L_1 . Există o infinitate de șiruri în L care pot fi descompuse sub formă de n -upluri care sînt în L_1 . Lungimile acestor șiruri formează o mulțime care conține o progresie aritmetică infinită. Derivînd cu $(n-1)$ -contextul $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$ de la aceste șiruri obținem șiruri de forma $a^{2^i}b$ cu lungimile formînd o mulțime care conține o progresie aritmetică infinită. Contradicție, deci limbajul L nu poate fi generat de gramatica (G', φ') , prin urmare, $L \notin \mathcal{C}_2(n)$ și teorema este demonstrată.

Teorema 9.24. *Incluziunea $\mathcal{C}_3(n) \subset \mathcal{C}_2(n)$ este strictă pentru orice $n \geq 2$.
Demonstrație.* Fie limbajul

$$L = \{(a^i b)^j a^k \mid i \geq 1, j \geq 0, 0 \leq k \leq i\}.$$

Următoarea gramatică 2-contextuală 2-condițională generează acest limbaj, deci $L \in \mathcal{C}_2(n)$: $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle a \rangle, \langle b \rangle\})$,

$$\varphi(\langle a \rangle) = L_a \times \{\lambda\}, \quad \varphi(\langle b \rangle) = L_b \times \{\lambda\},$$

unde

$$L_a = \{a^i \mid i \geq 0\} \cup \{x b a^i b a^j \mid 0 \leq j < i, x \in \{a, b\}^*\},$$

$$L_b = \{a^i \mid i \geq 1\} \cup \{x b a^i b a^j \mid i \geq 1, x \in \{a, b\}^*\}.$$

(Evident, limbajele L_a și L_b sînt independente de context.) Să presupunem că există o gramatică n -contextuală 3-condițională (G', φ') care generează limbajul L , $G' = (V, B, C)$. Deoarece există șiruri în L cu un număr arbitrar de mare de apariții ale simbolului b , rezultă că există $(n-1)$ -contexte în C care conțin acest simbol. În generarea unor șiruri de forma $(a^i b)^j$ cu i și j arbitrar de mari, ultimul $(n-1)$ -context folosit trebuie să fie de forma $\langle a^{i_1}, \dots, a^{i_{n-2}}, a^{i_{n-1}} b \rangle$, $i_j \geq 0$, și $\varphi(\langle a^{i_1}, \dots, a^{i_{n-1}} b \rangle)$ intersectat cu limbajul L trebuie să conțină numai n -upluri de forma $(x b a^{r_0}, a^{r_1}, \dots, a^{r_{n-2}})$, $r_i \geq 0$. De asemenea, ultimul context folosit în derivarea unui șir $(a^i b)^j a^k$, $k < i$, i și j arbitrar de mari, trebuie să fie de forma $\langle a^{i_1}, \dots, a^{i_{n-1}} \rangle$ și $\varphi(\langle a^{i_1}, \dots, a^{i_{n-1}} \rangle)$ intersectat cu limbajul L conține numai n -upluri de forma $(x b a^{r_0}, a^{r_1}, \dots, a^{r_{n-1}})$. Derivarea unei infinități de șiruri din limbajul L se face deci prin prelungire la dreapta și folosirea $(n-1)$ -contextelor respective se face în interiorul celui mai din dreapta subșir de forma a^k din șirul curent. Limbajele $\varphi(\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle)$ fiind n -regulate, între r_0 și numărul de apariții ale lui a în șirurile x din stînga subșirului a^{r_0} nu poate exista nici o corelare. Cu alte cuvinte, prelungirea la dreapta se face numai în funcție de subcuvîntul a^k din extrema dreaptă a șirului de derivat. Acest lucru nu poate asigura egalitatea subcuvîntelor $b a^i b$ din șirul obținut prin derivare, deci limbajul $L(G', \varphi')$ conține șiruri care nu sînt în limbajul L . În consecință, $L \notin \mathcal{C}_3(n)$ și teorema este demonstrată.

9.4. Scheme n -contextuale

Într-o gramatică n -contextuală $G = (V, B, C, \varphi)$, precizarea funcției $\varphi: (V^*)^n \rightarrow \mathcal{P}(C)$ poate fi făcută în multe moduri. Când funcția φ este calculabilă algoritmic se poate pune problema identificării ei printr-un algoritm particular (de un tip particular). Apare astfel naturală ideea considerării unor funcții φ „gramaticale”, adică precizate cu ajutorul unor gramatici care identifică diverse moduri de a codifica perechile argumente-valori. În acest mod se ajunge la diferite forme de „scheme n -contextuale”.

Definiția 9.5. O schemă n -contextuală de tip 1 este un sistem

$$F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$$

unde V și B sînt ca mai sus, C_j sînt mulțimi finite de $(n-1)$ -contexte, și $E_j \subseteq (V^*)^n$, $1 \leq j \leq k$. Limbajul generat de schema F este definit cu ajutorul următoarei relații de derivare: pentru $x, y \in V^*$ scriem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $x = x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in V^*$, $y = x_1 u_1 x_2 u_2 \dots x_{n-1} u_{n-1} x_n$, astfel încît $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_j$, $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C_j$ pentru un j oarecare între 1 și k .

Definiția 9.6. O schemă n -contextuală de tip 2 este un sistem

$$F = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\}),$$

unde V, B, C_j , $1 \leq j \leq k$, sînt ca în definiția anterioară, M_n este o mulțime de marcatori, $(M_n = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\})$, $M_n \cap V = \emptyset$, iar $E_j \subseteq V^* \{c_1\} V^* \{c_2\} \dots V^* \{c_{n-1}\} V^*$, $1 \leq j \leq k$.

Limbajul generat de schema F se definește astfel: dacă $x, y \in V^*$ și $x = x_1 x_2 \dots x_n$, $y = x_1 u_1 x_2 u_2 \dots x_{n-1} u_{n-1} x_n$ pentru $x_1 c_1 x_2 c_2 \dots c_{n-1} x_n \in E_j$, $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \rangle \in C_j$ pentru un j între 1 și k , atunci scriem $x \Rightarrow y$.

Definiția 9.7. O schemă n -contextuală de tip 3 este un sistem

$$F = (V, M'_n, B, D)$$

unde V și B sînt ca mai sus, $M'_n = \{c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}\}$ este o mulțime de marcatori iar $D \subseteq V^* \{c_1\} V^* \dots V^* \{c_{n-1}\} V^* \{c_n\} V^* \{c_{n+1}\} \dots \{c_{2n-2}\} V^*$, s fixat.

Pentru $x, y \in V^*$ scriem $x \Rightarrow y$ dacă și numai dacă $x = x_1 x_2 \dots x_n$, $y = x_1 u_1 x_2 u_2 \dots x_{n-1} u_{n-1} x_n$ astfel încît $x_1 c_1 \dots c_{n-1} x_n c_n u_1 c_{n+1} \dots u_{n-2} c_{2n-2} u_{n-1}$ este un șir din mulțimea D .

Teorema 9. 25. Pentru un limbaj $L \subseteq V^*$ următoarele afirmații sînt echivalente:

- 1) L este limbaj n -contextual selectiv,
- 2) L este generat de o schemă n -contextuală de tip 1,
- 3) L este generat de o schemă n -contextuală de tip 2,
- 4) L este generat de o schemă n -contextuală de tip 3.

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică n -contextuală selectivă. Ea este evident echivalentă cu următoarea schemă n -contextuală de tip 1:

$$F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq 2^{carac}\}),$$

unde $C_j \subseteq C$ și $E_j = \varphi^{-1}(C_j)$, $j = 1, 2, \dots, 2^{carac}$.

Dacă $F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ este o schemă n -contextuală de tip 1, atunci limbajul $L(G)$ este generat și de schema n -contextuală de tip 2

$$F' = (V, M_n, B, \{(E'_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$$

unde $E'_j = \{x_1 c_1 x_2 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_j\}$, $1 \leq j \leq k$.
Dacă $F = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ este o schemă n -contextuală de tip 2, atunci schema

$$F' = (V, M'_n, B, D)$$

cu $D = \{x_1 c_1 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n u_1 \dots u_{n-2} c_{2n-2} u_{n-1} \mid x_1 c_1 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n \in E_j, \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C_j, j = 1, 2, \dots, k\}$ generează evident limbajul $L(F)$.
În sfârșit, fie schema n -contextuală de tip 3 $F = (V, M'_n, B, D)$. Construim gramatica n -contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ unde

$$C = \{\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \mid x_1 c_1 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n u_1 \dots u_{n-2} c_{2n-2} u_{n-1} \in D\},$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \{\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \mid x_1 c_1 \dots c_{n-1} x_n c_n u_1 c_{n-1} \dots c_{2n-2} u_{n-1} \in D\}.$$

Evident, $L(G) = L(F)$ și teorema este demonstrată.

Prezența limbajelor E_j și D în definițiile anterioare conduce în mod firesc la considerarea de restricții privind tipul acestor limbaje. Obținem astfel scheme n -contextuale condiționale.

Definiția 9.8. O schemă n -contextuală de tip 1, $F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$, se zice de tip $(1, i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, dacă și numai dacă $E'_j \in \mathcal{L}_i^n$, $1 \leq j \leq k$.

O schemă n -contextuală de tip 2, $F = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ se zice de tip $(2, i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, dacă și numai dacă $E_j \in \mathcal{L}_i$, $1 \leq j \leq k$.

O schemă n -contextuală de tip 3, $F = (V, M'_n, B, D)$, se zice de tip $(3, i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, dacă și numai dacă $D \in \mathcal{L}_i$.

Vom nota cu $\mathcal{F}_i^j(n)$, $n \geq 2$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, mulțimea limbajelor generate de schemele n -contextuale de tip (j, i) .

Teorema 9.26. Pentru orice $n \geq 2$ și $i = 0, 1, 2, 3$, avem egalitatea $\mathcal{F}_i^2(n) = \mathcal{F}_i^3(n)$.

Demonstrație. Fie $F = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ o schemă n -contextuală de tip $(2, i)$. Construim schema n -contextuală de tip $(3, i)$ $F' = (V, M'_n, B, D)$ unde

$$D = \{x_1 c_1 \dots x_{n-1} c_{n-1} u_1 c_{n-1} \dots c_{2n-2} u_{n-1} \mid \text{există } j \text{ astfel încît } x_1 c_1 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n \in E_j, \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C_j\}.$$

Deoarece mulțimile C_j sînt finite, rezultă că limbajul D este în $\mathcal{L}_i$. Egalitatea $L(F) = L(F')$ este evidentă deci $\mathcal{F}_i^2(n) \subseteq \mathcal{F}_i^3(n)$.

Invers, fie $F = (V, M'_n, B, D)$ o schemă n -contextuală de tip $(3, i)$. Pentru fiecare sir $x_1 c_1 \dots c_{2n-2} u_{n-1}$ din D considerăm mulțimea $C_j = \{\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle\}$. Atunci, fie

$$E_j = \{x_1 c_1 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n \mid x_1 c_1 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n u_1 \dots c_{2n-2} u_{n-1} \in D\}.$$

Schema n -contextuală de tip 2 $F' = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ este evident de tip $(2, i)$ și este echivalentă cu schema F , deci $\mathcal{F}_i^3(n) \subseteq \mathcal{F}_i^2(n)$.

Teorema 9.27. Pentru orice $n \geq 2$, $i = 0, 1$, avem incluziunea $\mathcal{F}_i^1(n) \subseteq \mathcal{F}_i^2(n)$, iar pentru $n \geq 2$, $i = 2, 3$, avem $\mathcal{F}_i^2(n) \subseteq \mathcal{F}_i^1(n)$.

Demonstrație. Fie $F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ o schemă n -contextuală de tip $(1, i)$, $i = 0, 1$. Construim schema n -contextuală de tip $(2, i)$ $F' = (V, M_n, B, \{(E'_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ ca în demonstrația teoremei 9.25. Se poate arăta că limbajele E'_j , $1 \leq j \leq k$, sînt de același tip cu E_j . Egalitatea $L(F) = L(F')$ este evidentă, deci avem incluziunea $\mathcal{F}_i^1(n) \subseteq \mathcal{F}_i^2(n)$.

Fie și $F = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ o schemă n -contextuală de tip $(2, i)$, $i = 2, 3$. Construim schema n -contextuală de tip $(1, i)$ $F' = (V, B, \{(E'_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ unde

$$E'_j = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 c_1 x_2 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n \in E_j\}.$$

Conform lemei 9.5, n -limbajul E'_j este în $\mathcal{L}_2^n$ dacă $E_j \in \mathcal{L}_2$. Lema 9.5 poate fi demonstrată ușor și pentru limbaje regulate. (De fapt, în prima parte a demonstrației teoremei 9.20, se face acest lucru.) Prin urmare, limbajul E'_j este de același tip cu limbajul E_j , deci obținem incluziunile $\mathcal{F}_i^2(n) \subseteq \mathcal{F}_i^1(n)$, $i = 2, 3$.

Teorema 9.28. Avem egalitățile $\mathcal{F}_i^1(n) = \mathcal{C}_i(n)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

Demonstrație. Fie $F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ o schemă n -contextuală de tip $(1, i)$. Construim gramatica n -contextuală i -condițională (G, φ) cu $G = (V, B, C)$ unde $C = \bigcup_{j=1}^k C_j$ și

$$\varphi(\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle) = \cup E_j \text{ pentru } \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C_j.$$

Egalitatea $L(F) = L(G, \varphi)$ este evidentă.

Invers, dîndu-se (G, φ) , $G = (V, B, C)$, o gramatică n -contextuală i -condițională, se poate construi schema n -contextuală de tip $(1, i)$ echivalentă

$$F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$$

unde $C_j = \{\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle, \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \in C \text{ și } E_j = \varphi(C_j)\}$. Obținem astfel incluziunea $\mathcal{C}_i(n) \subseteq \mathcal{F}_i^1(n)$ și demonstrația este completă.

Observația 9.3. Dacă $L_n \subseteq (V^*)^n$ este în familia $\mathcal{L}_i^n$, $i = 2, 3$, atunci limbajul $L = \{x_1 c_1 x_2 \dots x_{n-1} c_{n-1} x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in L_n\}$ nu este neapărat în $\mathcal{L}_i$. De exemplu, fie $L_n = \{(a^i, a^i, \dots, a^i) \mid i \geq 0\}$. Pentru $n \geq 3$ limbajul $L = \{a^i c_1 a^i \dots a^i c_{n-1} a^i \mid i \geq 0\}$ nu este nici măcar independent de context. Pe de altă parte, dacă $L_n \subseteq (V^*)^n$ este în familia $\mathcal{L}_i^n$, $i = 0, 1, 2, 3$, atunci $P_j(L_n) = \{x_j \mid (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in L_n\}$ este limbaj de tip i [18]. Fie L un limbaj de tip 0 care nu este dependent de context. Conform teoremei II, 15.5 din [10], există limbajul $L' \in \mathcal{L}_1$ astfel încît

i) $L' \subseteq \{a^i c_1 x \mid i \geq 0, x \in L\}$,

ii) oricare ar fi $x \in L$ există i astfel încît $a^i c_1 x \in L'$.

Să considerăm limbajul L' . Limbajul $L_2 = \{(a^i, x) \mid a^i c_1 x \in L'\}$ nu poate fi în $\mathcal{L}_1^2$ deoarece proiecția pe componenta a doua, $P_2(L') = \{x \mid (a^i, x) \in L_2\} = L$, nu este în familia $\mathcal{L}_1$. Prin urmare, pentru limbajele de tip 1 nu este valabil un rezultat de tipul lemei 9.5. În consecință, prima parte a demonstrației teoremei 9.27 nu poate fi folosită pentru a arăta că $\mathcal{F}_i^1(n) \subseteq \mathcal{F}_i^2(n)$ pentru $i = 2, 3$, iar partea a doua a acestei demonstrații nu se poate folosi pen-

tru a arăta că $\mathcal{F}_1^2(n) \subseteq \mathcal{F}_1^1(n)$. Pentru limbajele de tip 0 se poate obține ușor un rezultat de tipul lemei 9. 5. (Derivăm limbajul L pe o singură componentă a unei n -gramatici de tip 0 și apoi „transportăm” subșirurile x_i pe componentele corespunzătoare.) Pentru acest tip obținem deci incluziunea $\mathcal{F}_0^1(n) \subseteq \mathcal{F}_0^2(n)$, prin urmare, $\mathcal{F}_0^j(n) = \mathcal{C}_0(n)$, $j = 1, 2, 3$. Pentru $i = 1, 2, 3$, problema dacă incluziunile din teorema 9. 27 sînt stricte sau nu rămîne deschisă (P22).

Deoarece $\mathcal{F}_0^i(n) = \mathcal{C}_0(n)$, $i = 1, 2, 3$, și $\mathcal{C}_0(n) \subset \mathcal{L}_0$ (teorema 9. 22), rezultă că $\mathcal{F}_0^i(n) \subset \mathcal{L}_0$, $i = 1, 2, 3$. O incluziune asemănătoare este adevărată pentru schemele de tip $(j, 1)$, $j = 1, 2, 3$.

Teorema 9.29. Pentru orice $j = 1, 2, 3$, avem incluziunea $\mathcal{F}_1^j(n) \subset L_1$, $n \geq 2$.

Demonstrație. Conform Teoremei 9. 24, $\mathcal{F}_1^j(n) \subset \mathcal{S}(n)$ pentru orice $n \geq 2$ și conform teoremei 9.9 există limbaje dependente de context care nu sînt în $\mathcal{S}(n)$. În concluzie, este suficient să demonstrăm că $\mathcal{F}_1^j(n) \subseteq \mathcal{L}_1$. Pe de altă parte, deoarece $\mathcal{F}_1^j(n) \subseteq \mathcal{F}_1^2(n) = \mathcal{F}_1^3(n)$ (teoremele 9. 26 și 9. 27), rezultă că este suficient să probăm incluziunea $\mathcal{F}_1^2(n) \subseteq \mathcal{L}_1$.

Fie schema n -contextuală de tip $(2, 1)$, $F = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$. Fie $G_j = (V_N^{(j)}, V \cup M_n, S^{(j)}, P^{(j)})$ o gramatică de tip 1 pentru limbajul E_j , $1 \leq j \leq k$. Presupunem vocabularele $V_N^{(j)}$ două cîte două disjuncte și considerăm că C_j conține s_j $(n-1)$ -contexte. Construim gramatica $G = (V_N, V, S, P)$ unde

$$V_N = \bigcup_{j=1}^k V_N^{(j)} \cup \bigcup_{i=1}^k V_i \cup \{S, A_1, A_2, X\} \cup \{T_{jr} \mid j = 1, 2, \dots, k, r = 1, 2, \dots, s_j\}, \text{ cu } V_i = \{a^{(i)} \mid a \in V\},$$

iar P conține următoarele reguli:

$$1) S \rightarrow A_1 X z A_2, z \in B.$$

(Se introduce un șir din B între marcatorii A_1 și A_2 .)

$$2) A_1 X \rightarrow A_1 T_{jr} S^{(j)}, 1 \leq j \leq k, 1 \leq r \leq s_j.$$

(Cînd se află lîngă simbolul A_1 , simbolul intermediar X introduce simbolurile T_{jr} și $S^{(j)}$; $S^{(j)}$ va produce un șir din $L(G_j)$ care va fi intercalat cu șirul curent de derivat, iar simbolul T_{jr} va introduce un $(n-1)$ -context din C_j dacă șirul curent este în limbajul $L(G_j) = E_j$.)

$$3) x' \rightarrow y', \text{ dacă regula } x \rightarrow y \text{ este în } P^{(j)}, x', y' \text{ se obțin din } x \text{ și } y \text{ înlocuind orice simbol } a \in V \text{ cu } a^{(j)}, 1 \leq j \leq k.$$

(Se produce un șir din E_j cu simbolurile $a \in V$ înlocuite cu $a^{(j)}$.)

$$4) a^{(j)} b \rightarrow b a^{(j)}, a \in V, b \in V, 1 \leq j \leq k,$$

$$c_i a \rightarrow a c_i, a \in V, 1 \leq i \leq n-1.$$

(Șirul din E_j se împrăștie în șirul curent.)

$$5) T_{jr} a^{(j)} a \rightarrow a T_{jr}, a \in V, 1 \leq j \leq k, 1 \leq r \leq s_j,$$

$T_{jr} c_i \rightarrow u_{ir}^{(j)} T_{jr}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq r \leq s_j$, dacă $(n-1)$ -contextul cu numărul r din C_j este de forma $\langle u_{1r}^{(j)}, \dots, u_{n-1r}^{(j)} \rangle$,

$$T_{jr} A_2 \rightarrow X A_2.$$

(Simbolurile T_{jr} testează dacă şirul curent este în E_j şi în cazul afirmativ folosesc un $(n-1)$ -context din C_j . Cînd se ajunge în extremitatea dreaptă a şirului derivat se reintroduce simbolul intermediar X .)

$$6) aX \rightarrow Xa, a \in V,$$

$$XA_2 \rightarrow \lambda,$$

$$A_1 \rightarrow \lambda.$$

(Simbolul X circulă liber spre stînga putînd determina o nouă derivare sau se şterge împreună cu simbolul A_2 producînd sfîrşitul derivării.)

Egalitatea $L(G) = L(F)$ este evidentă. Deoarece $WS(x, G) \leq 2|x| + 3$ pentru orice şir $x \in L(G)$, rezultă că $L(G) \in \mathcal{L}_1$ şi teorema este demonstrată.

Teorema 9.30. *Sînt adevărate incluziunile stricte $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{F}_3^2(n)$, $n \geq 2$, $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{F}_2^2(n)$, $n \geq 3$, iar $\mathcal{L}_2$ este incomparabilă cu familia $\mathcal{F}_2^2(2)$.*

Demonstraţie. Fie $L \in \mathcal{L}_3$ şi fie întregii p, q asociaţi lui L de lema de descompunere uvx pentru limbajele regulate. Construim schema 2-contextuală de tip $(2, 3) F = (V, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ unde

$$B = \{x \in V^* \mid |x| \leq p\}, C_j = \{\langle u_j \rangle\}, |u_j| \leq q,$$

$$E_j = \{xc_1y \mid xu_jy \in L\}, \{\langle u_j \rangle\} = C_j.$$

Egalitatea $L(F) = L$ este evidentă. Limbajul E_j este regulat. (El poate fi obţinut prin traducerea limbajului L cu ajutorul unui gsm g_u , asemănător celui din demonstraţia teoremei 9.20; familia $\mathcal{L}_3$ este închisă la aplicaţii gsm arbitrare.)

Dacă $L \in \mathcal{L}_2$, atunci demonstraţia este asemănătoare; se iau mulţimile

$$C_j = \{\langle u_j, v_j \rangle\}, |u_j v_j| \leq q,$$

$$E_j = \{cx_1yc_2z \mid cu_jyv_jz \in L\}, \{\langle u_j, v_j \rangle\} = C_j.$$

Din nou limbajul E_j se poate obţine cu ajutorul unui gsm plecînd de la limbajul L , deci $E_j \in \mathcal{L}_2$ şi incluziunile din enunţ sînt demonstrate.

Familia $\mathcal{F}_3^2(2)$ conţine limbaje neregulate (schema $(\{a, b\}, \{ab\}, \{\langle a^i c_1 b^j \rangle \mid i, j \geq 0\}, \{\langle ab \rangle\})$) generează limbajul neregulat $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ iar familia $\mathcal{F}_2^2(2)$ conţine limbaje neindependente de context. De exemplu, limbajul $L = \{a^n b^n c^m \mid 0 \leq m \leq n\}$ este în $\mathcal{F}_2^2(2)$ deoarece poate fi generat cu schema $F = \{a, b, c\}, \{\lambda\}, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq 2\}$ unde

$$E_1 = \{a^i c_1 b^i \mid i \geq 0\}, C_1 = \{\langle ab \rangle\},$$

$$E_2 = \{a^i b^j c_1 c^k \mid i \geq 0, j > k \geq 0\}, C_2 = \{\langle c \rangle\},$$

dar limbajul L nu este independent de context.

Incluziunile anterioare sînt deci stricte şi $\mathcal{F}_2^2(2) - \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$. Deoarece $\mathcal{C}_2(2) \subset \mathcal{S}(2)$ (teorema 9.22), $\mathcal{F}_2^2(2) \subset \mathcal{C}_2(2)$ (teoremele 9.26, 9.27, 9.28), dar $\mathcal{L}_2 - \mathcal{S}(2) \neq \emptyset$ (teorema 9.9), rezultă că $\mathcal{L}_2 - \mathcal{F}_2^2(2) = \emptyset$ şi teorema este complet demonstrată.

Teorema 9.31. Toate incluziunile $\mathcal{F}_i^j(n) \subset \mathcal{F}_{i-1}^j(n)$, $i = 1, 2, 3$ sînt stricte, $n \geq 2$, $j = 1, 2, 3$.

Demonstrație. Incluziunile $\mathcal{F}_i^j(n) \subseteq \mathcal{F}_{i-1}^j(n)$ sînt evidente. Deoarece familia $\mathcal{F}_0^j(2)$ conține limbaje nedependente de context, dar $\mathcal{F}_1^j(n) \subset \mathcal{L}_1$ (teorema 9.29), rezultă că pentru $i = 1$ afirmația din enunț este adevărată.

În demonstrația teoremei 9.23 s-a arătat că limbajul $L = \{a^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^{2^n}b \mid n \geq 1\}$ nu aparține nici unei familii $\mathcal{C}_2(n)$, $n \geq 2$. Deoarece $\mathcal{F}_2^j(n) \subset \mathcal{C}_2(n)$, $n \geq 2$, pentru orice $j = 1, 2, 3$ (teoremele 9.26, 9.27, 9.28), rezultă că este suficient să arătăm că L este în familia $\mathcal{F}_1^j(2)$. Pentru aceasta să considerăm schema 2-contextuală de tip (1,1) $F = (\{a, b\}, \{a\}, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq 2\})$, unde

$$E_1 = \{(a^n, \lambda) \mid n \geq 1\}, C_1 = \{\langle a \rangle\},$$

$$E_2 = \{(a^{2^n}, \lambda) \mid n \geq 1\}, C_2 = \{\langle b \rangle\}.$$

Egalitatea $L = L(F)$ este evidentă, deci incluziunile $\mathcal{F}_2^j(n) \subset \mathcal{F}_1^j(n)$ sînt stricte pentru orice $j = 1, 2, 3$, $n \geq 2$.

Pe de altă parte, în demonstrația teoremei 9.24 s-a arătat că limbajul $L = \{(a^i b)^j a^k \mid j \geq 0, i \geq 1, 0 \leq k \leq i\}$ nu este în familia $\mathcal{C}_3(n)$ pentru nici un $n \geq 2$. Deoarece familia $\mathcal{C}_3(n)$ include familiile $\mathcal{F}_3^j(n)$, $j = 1, 2, 3$ (teoremele 9.26, 9.27, 9.28), rezultă că este suficient să arătăm că limbajul L este în familia $\mathcal{F}_2^j(2)$. Pentru aceasta, considerăm schema 2-contextuală de tip (2,2) $F = (\{a, b\}, M_2, \{\lambda\}, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq 6\})$ unde

$$E_1 = \{a^i c_1 \mid i \geq 0\}, C_1 = \{\langle a \rangle\},$$

$$E_2 = \{a^i c_1 \mid i \geq 1\}, C_2 = \{\langle a \rangle, \langle b \rangle\},$$

$$E_3 = \{a^i b a^j c_1 \mid i > j \geq 0\}, C_3 = \{\langle a \rangle\},$$

$$E_4 = \{a^i b a^j c_1 \mid i \geq 1\}, C_4 = \{\langle b \rangle\},$$

$$E_5 = \{x b a^i b a^j c_1 \mid x \in \{a, b\}^*, i > j \geq 0\}, C_5 = \{\langle a \rangle\},$$

$$E_6 = \{x b a^i b a^j c_1 \mid x \in \{a, b\}^*, i \geq 1\}, C_6 = \{\langle b \rangle\}.$$

Evident, $E_j \in \mathcal{L}_2$ pentru orice j și $L(F) = L$. (Adăugarea unui simbol b cu excepția primului din stînga, este posibilă numai dacă șirul curent se termină cu două subșiruri egale de simboluri a .) În concluzie, $L \in \mathcal{F}_2^j(2)$ și teorema este complet demonstrată.

Observația 9.4. Toate incluziunile $\mathcal{F}_i^j(n) \subset \mathcal{F}_i^j(n+1)$, $n \geq 2$, $j = 1, 2, 3$, $i = 0, 1, 2, 3$, sînt stricte. Într-adevăr, avem incluziunile $\mathcal{C}(n) \subseteq \mathcal{F}_3^j(n)$, $n \geq 2$, $j = 1, 2, 3$. (De exemplu, dacă $G = (V, B, C)$ este o gramatică n -contextuală simplă, atunci ea este echivalentă cu schema n -contextuală de tip (1,3) $F = (V, B, \{(E_1, C)\})$ unde $E_1 = (V^*)^n$. În demonstrația teoremei 9.2 se arată că $\mathcal{C}(n+1) - \mathcal{S}(n) \neq \emptyset$. Deoarece $\mathcal{F}_i^j(n) \subset \mathcal{S}(n)$, rezultă că $\mathcal{F}_i^j(n+1) - \mathcal{F}_i^j(n) \neq \emptyset$ pentru orice $n \geq 2$, $j = 1, 2, 3$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Să observăm, de asemenea, că gramaticile 3-contextuale exterioare selective i -condiționale corespund gramaticilor contextuale selective $\mathcal{L}_i$ -con-

diționale, iar gramaticile 3-contextuale interioare selective i -condiționale corespund gramaticilor contextuale interioare $\mathcal{L}_i$ -condiționale. Prin urmare, $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i) \subseteq \mathcal{C}_i(3)$ și $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \subseteq \mathcal{I}_i(3)$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Teorema 9.32. *Sînt adevărate incluziunile stricte $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{F}_i^j(3)$, $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{F}_i^j(3)$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.*

Demonstrație. Fie gramatica contextuală $\mathcal{L}_i$ -condițională (G, φ) cu $G = (V, B, C)$, $\varphi : C \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$. Construim schema 3-contextuală de tip $(2, i)$ $F = (V, M_3, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ unde dacă $C = \{\langle u_j, v_j \rangle \mid 1 \leq j \leq k\}$ atunci

$$C_j = \{\langle u_j, v_j \rangle\},$$

$$E_j = \{c_1 x c_2 \mid x \in \varphi(\langle u_j, v_j \rangle)\}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Egalitatea $L(G, \varphi) = L(F)$ este evidentă și E_j este de același tip cu $\varphi(\langle u_j, v_j \rangle)$, deci avem incluziunea $\mathcal{C}(\mathcal{L}_i) \subseteq \mathcal{F}_i^j(3)$, $j = 2, 3$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Dacă (G, φ) era gramatică interioară selectivă, atunci construim schema F în mod asemănător, avînd

$$E_j = \{x_1 c_1 x c_2 x_2 \mid x \in \varphi(\langle u_j, v_j \rangle), \quad x_1, x_2 \in V^*\}.$$

Prin urmare, $\mathcal{I}(\mathcal{L}_i) \subseteq \mathcal{F}_i^j(3)$, $j = 2, 3$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Pentru $j = 1$ schemele corespunzătoare se pot construi în mod asemănător (luăm $E_j = \{(\lambda, x, \lambda) \mid x \in \varphi(\langle u_j, v_j \rangle)\}$, respectiv, $E_j = \{(x_1, x, x_2) \mid x \in \varphi(\langle u_j, v_j \rangle), \quad x_1, x_2 \in V^*\}$).

Să considerăm acum limbajul $L = \{a^n \mid n \geq 1\} \cup \{ba^n ba^n \mid n \geq 0\}$. Acest limbaj este în familia $\mathcal{F}_3^2(3)$. Într-adevăr, el poate fi generat cu schema $F = (\{a, b\}, M_3, \{a, bb\}, \{(E_1, C_1), (E_2, C_2)\})$, unde

$$E_1 = \{a^n c_1 c_2 \mid n \geq 1\}, \quad C_1 = \{\langle a, \lambda \rangle\},$$

$$E_2 = \{ba^n c_1 b c_2 a^m \mid n, m \geq 1\}, \quad C_2 = \{\langle a, a \rangle\}.$$

Limbajul L nu este în $\mathcal{C}(\mathcal{L}_0) \cup \mathcal{I}(\mathcal{L}_0)$ deoarece nu este nici în $\mathcal{S} \cup \mathcal{I}\mathcal{S}$. Într-adevăr, dacă $L = L(G)$, $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă, atunci pentru generarea unui șir $ba^n ba^n$ cu n arbitrar de mare, ultimul context aplicat trebuie să fie de forma $\langle ba^i, a^j \rangle$, sau $\langle \lambda, a^j \rangle$, sau $\langle ba^i, \lambda \rangle$, $i \geq 0$, $j \geq 1$. Eliminînd din șirul $ba^n ba^n$ un asemenea context, obținem un șir care nu este în L , deci nu putem avea $L = L(G)$. Pe de altă parte, dacă o gramatică $G = (V, B, C, \varphi)$ interioară selectivă generează limbajul L , atunci trebuie să existe cel puțin un context de forma $\langle a^i, a^j \rangle$, $i, j \geq 0$, $i + j > 0$, astfel încît există $a^k \in L$ cu $\langle a^i, a^j \rangle \in \varphi(a^k)$. Șirul $ba^k ba^k$ este în L , deci ar trebui ca și $ba^k ba^{k+i+j}$ să fie în L . Contradicție. Limbajul L nu este în $\mathcal{S} \cup \mathcal{I}\mathcal{S}$ și teorema este demonstrată.

Indicații bibliografice. Gramaticile n -contextuale au fost introduse (în varianta selectivă) în [50]. O formă particulară de asemenea gramatici a fost propusă și în finalul lucrării [83]. Gramaticile n -contextuale neselective au fost introduse și studiate pentru prima dată în lucrarea de față. În [32] se consideră o altă variantă de gramatici contextuale n -dimensionale care generează însă limbaje n -dimensionale (mulțimi de n -upluri de șiruri). În [32] se arată că un limbaj este independent de context dacă și numai dacă el este

componentă a unui limbaj contextual n -dimensional. În [50] se studiază puterea generativă, proprietățile de închidere la operații și decidabilitatea unor probleme referitoare la gramaticile și limbajele n -contextuale selective. În [57] se studiază puterea generativă a acestor gramatici comparată cu cea a gramaticilor simplu matriciale. Se arată de asemenea că familia $\mathcal{S}(\infty)$ include strict familia limbajelor generate de gramaticile de „adjuncție distribuită cu elemente nule” din [36]. În [51], [52] se introduc și se studiază gramaticile n -contextuale exterioare, interioare și generalizate.

Gramaticile n -contextuale condiționale — în sensul definiției 7.7 — sînt introduse în [54]; în lucrarea de față am adoptat varianta corespunzătoare definiției 7.6.

Schemele n -contextuale au fost introduse în [33] unde se consideră și varianta condițională a lor. În [33] se demonstrează și o teoremă de caracterizare a limbajelor n -contextuale ca soluții ale unor sisteme speciale de ecuații peste monoidul liber. Teoremele 9. 23, 9. 24, 9. 31 se bazează pe rezultate din [82].

Un tip special de gramatici multi-contextuale este introdus în [61] și studiat într-un cadru algebric în care se demonstrează că o variantă a acestor gramatici caracterizează limbajele independente de context care pot fi generate cu gramatici cu exact un simbol neterminal.

Multe dintre demonstrațiile acestui capitol sînt reformulări ale demonstrațiilor din lucrările citate, iar unele rezultate sînt obținute pe alte căi. Toate rezultatele care implică familiile $\mathcal{C}(n)$, $\mathcal{C}(\infty)$, lemele 9. 3, 9. 4, incluziunea $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{C}_2(3)$ din teorema 9. 20, lema 9. 5 apar pentru prima dată aici.

Într-o derivare în raport cu o schemă n -contextuală, ordinea în care sînt folosite $(n-1)$ -contextele este arbitrară. Impunerea de restricții asupra acestui aspect conduce la schemele n -contextuale cu restricții în derivare. Se pot considera scheme matriciale, programate, controlate; cele trei restricții se pot impune oricăreia dintre cele trei tipuri de scheme n -contextuale. În [55] au fost definite și studiate scheme n -contextuale, i -condiționale cu limbaje de control. Celelalte variante rămîn a fi investigate (*problema P23*).

O schemă n -contextuală i -condițională controlată, $n \geq 2$, $i = 0, 1, 2, 3$, este o pereche (F, K) , unde $F = (V, M_n, B, \{(E_j, C_j) \mid 1 \leq j \leq k\})$ este o schemă n -contextuală de tip $(2, i)$, iar K este un limbaj pe mulțimea $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, e_j fiind o etichetă a perechii (E_j, C_j) . Limbajul generat de (F, K) este format din acele șiruri care pot fi generate de schema F și au cuvîntul de control în limbajul K .

În [55] se studiază puterea generativă a acestor dispozitive precum și proprietățile de închidere la operații ale familiilor de limbaje generate.

Schemele n -contextuale condiționale cu limbaj de control merită investigații suplimentare, ele fiind cele mai generale tipuri de mecanisme generative contextuale cunoscute (*problema 24*). Dealtfel, studiul lor este în plină desfășurare.

ALTE PROBLEME PRIVIND GRAMATICILE ȘI LIMBAJELE CONTEXTUALE

10.1. Monoidul sintactic al limbajelor contextuale

Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj oarecare și fie δ_L relația de echivalență definită în capitolul 1: $x \delta_L y$ dacă și numai dacă $\{\langle u, v \rangle \mid uxv \in L\} = \{\langle u, v \rangle \mid uyv \in L\}$. Teorema 1.1 dădea o caracterizare a limbajelor regulate cu ajutorul acestei relații de echivalență. Mai exact, ea afirmă că un limbaj este regulat dacă și numai dacă V^*/δ_L este o mulțime finită. Mulțimea V^*/δ_L poartă numele de *monoid sintactic* asociat limbajului L . Vom nota în continuare cu $M(L)$ acest monoid și cu $f: V^* \rightarrow M(L)$ vom nota aplicația canonică între cei doi monoizi. Mulțimea $f(L)$ se va numi *imaginea lui L în monoidul său sintactic*.

Evident, orice limbaj se scrie ca reuniune de clase de echivalență în raport cu relația δ_L asociată lui ($x \in L$ și $y \notin L$ nu pot fi echivalente).

Este naturală problema încercării de a caracteriza și alte familii de limbaje decât $\mathcal{L}_3$ cu ajutorul monoidului sintactic sau al altor structuri înrudite. În particular, deoarece gramaticile contextuale (simple, generalizate și selective în primul rând) sînt definite cu folosirea esențială a noțiunii de context, este de așteptat să existe unele rezultate interesante în legătură cu monoidul lor sintactic.

Monoidul sintactic al limbajelor contextuale rămîne a fi investigat în continuare (*problema P25*). Probabil că tehnicile utilizate pentru studierea monoidului sintactic al limbajelor independente de context ([86]) pot fi utile și în acest caz. Aici vom prezenta numai cîteva rezultate preliminare referitoare la familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$ și $\mathcal{S}$.

Teorema 10.1. *Există limbaje contextuale simple care au o imagine infinită în monoidul lor sintactic.*

Demonstrație. Fie limbajul $L = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$. Acest limbaj este în familia $\mathcal{C}$ deoarece poate fi generat cu gramatica contextuală simplă $G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle a, b \rangle, \langle a, \lambda \rangle\})$. Fie șirurile $x_1 = a^i b^j$, $x_2 = a^k b^r$ cu $i \geq j$, $k \geq r$. Presupunem că $i - j < k - r$ și considerăm contextul $\langle u, v \rangle = \langle \lambda, b^{k-r} \rangle$. Obținem $ux_1v = a^i b^{j+k-r} \notin L$, dar $ux_2v = a^k b^{r+k-r} = a^k b^k \in L$. Prin urmare, oricare două șiruri x_1, x_2 ca mai sus nu sînt echivalente în raport cu relația δ_L . Deoarece $x_1, x_2 \in L$, rezultă că $f(L)$ este mulțime infinită.

Pe vocabularul cu un singur element orice limbaj contextual generalizat este regulat, deci monoidul său sintactic este finit. Pentru limbajele contextuale selective avem însă

Teorema 10.2. *Există $L \in \mathcal{S}$, $L \subseteq \{a\}^*$ cu imaginea infinită în monoidul său sintactic.*

Demonstrație. Fie limbajul $L = \{a^n \mid n \neq 2^k, k \geq 0\}$. Conform exemplului 2.8, limbajul L este contextual selectiv. Oricare două șiruri din limbajul L nu sînt echivalente în raport cu relația δ_L . Într-adevăr, fie $x_1 = a^n$, $x_2 = a^m$ cu $n < m$. Există $k \geq 0$ astfel încît $2^k > m - n$. Fie contextul $\langle u, v \rangle = \langle \lambda, a^{2^{k+1}-m} \rangle$. Obținem $ux_1v = a^{2^{k+1}-m+n}$ și $ux_2v = a^{2^{k+1}-m+m} = a^{2^{k+1}}$. Prin urmare, $ux_2v \notin L$, dar, deoarece $2^{k+1} - m + n = 2^{k+1} - (m - n) > 2^{k+1} - 2^k = 2^k$ și $2^{k+1} - (m - n) < 2^{k+1}$, rezultă că $ux_1v \in L$. Cele două șiruri x_1, x_2 nu sînt echivalente în raport cu relația δ_L , deci $f(L)$ este o mulțime infinită.

Teorema 10.3. *Există două limbaje, $L \in \mathcal{C}$ și $L' \notin \mathcal{G} \cup \mathcal{S}$, avînd același monoid sintactic.*

Demonstrație. Două limbaje complementare au același monoid sintactic. Este deci suficient să găsim un limbaj $L \in \mathcal{C}$ astfel încît $V^* - L \notin \mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. Fie $V = \{a, b\}$ și fie limbajul $L = \{x \in V^* \mid N(b, x) \leq 1\}$. Următoarea gramatică contextuală simplă generează acest limbaj: $G = (V, \{b, \lambda\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle \lambda, a \rangle\})$. Limbajul $V^* - L$ nu este însă în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$. Într-adevăr, să observăm că avem egalitatea $V^* - L = V^*\{b\}V^*\{b\}V^*$. Acest limbaj nu are nici proprietatea K și se poate vedea ușor că nu poate fi generat nici cu o gramatică contextuală generalizată. Rezultă că limbajul $V^* - L$ nu este în $\mathcal{G} \cup \mathcal{S}$ și teorema este demonstrată.

10.2. Compunerea gramaticilor contextuale

În [2] s-a propus următorul mod de a „compune” gramatici. Permiteam ca într-o gramatică Chomsky, $G = (V_N, V_T, S, P)$, S să fie un limbaj peste $V_N \cup V_T$ și nu un simplu simbol. Acest limbaj poate fi și el generat de o gramatică Chomsky care, de asemenea, are un limbaj de șiruri inițiale în locul lui S . Procedul se continuă de un număr finit de ori terminîndu-se cu o gramatică obișnuită. Se obține deci o secvență $G_1^n = (G_1, \dots, G_n)$ unde $G_i = (V_i^{(0)}, V_i^{(1)}, S^{(i)}, P^{(i)})$ și $V_i^{(1)} \subseteq V_i^{(0)+1} \cup V_{i-1}^{(1)+1}$, $S^{(i+1)} = L(G_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, și $S^{(1)} \in V_N^{(1)}$. Limbajul generat este $L(G_1^n) = L(G_n)$, unde $L(G_i) = \{x \in (V_T^{(i)})^* \mid \text{există } y \in S^{(i)} \text{ astfel încît } y \stackrel{*}{\Rightarrow} x\}$.

O operație de compunere asemănătoare se poate defini și pentru gramaticile contextuale. Admitem deci ca limbajul de plecare, B , al oricărei gramatici contextuale să fie infinit.

Definiția 10.1. O gramatică contextuală simplă compusă este o secvență $G_1^n = (G_1, G_2, \dots, G_n)$ unde $G_i = (V_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sînt gramatici contextuale simple astfel încît $V_i \subseteq V_{i+1}$, $B_{i+1} = L(G_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ și B_1 este finit. Limbajul generat de gramatica G_1^n este $L(G_1^n) = L(G_n)$.

În mod asemănător se pot defini gramatici contextuale compuse selective, interioare (selective) etc. În [67] s-a arătat că prin compunere nu se mărește puterea generativă a gramaticilor Chomsky de tip 0, 1, 2, 3, dar se mărește puterea generativă a gramaticilor liniare. Aici vom prezenta

cîteva rezultate referitoare la compunerea gramaticilor contextuale, urmînd ca problema sã fie investigatã în continuare (P26).

Teorema 10.4. *Existã un limbaj contextual simplu compus care nu este limbaj contextual generalizat.*

Demonstrație. Fie gramaticile contextuale simple

$$G_1 = (\{a, b, c\}, \{c\}, \{\langle a, b \rangle\}),$$

$$G_2 = (\{a, b, c\}, L(G_1), \{\langle b, a \rangle\}).$$

Evident, $L(G_1) = \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$, deci $L(G_2) = \{b^m a^n c b^n a^m \mid n, m \geq 0\}$.

Sã presupunem cã limbajul $L(G_2)$ este contextual generalizat. Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramaticã contextualã generalizatã pentru acest limbaj. Deoarece orice șir din B_1 trebuie sã conținã simbolul c , rezultã cã existã în C un context de forma $\langle a^i, v_1 \rangle$, $i > 0$, și un context de forma $\langle b^j, v_2 \rangle$, $j > 0$. Aceste contexte se pot folosi în orice ordine, deci limbajul $L(G)$ conține șiruri de forma $a^i b^j x$. Rezultã cã $L(G_2)$ nu poate fi generat de gramatica G , deci nu este în familia $\mathcal{G}$.

Compunerea mãrește deci destul de mult puterea generativã a gramaticilor contextuale simple (deci și a celor generalizate). Rezultatele urmãtoare vor confirma acest lucru.

Definiția 10.2. O gramaticã liniarã $G = (V_N, V_T, S, P)$ este *strict secvențialã* dacã și numai dacã V_N se poate scrie sub forma $V_N = \{X_1, \dots, X_k\}$ astfel încît regulile din P sînt de urmãtoarele forme:

$$1) X_i \rightarrow X_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, k,$$

$$2) X_i \rightarrow u_i X_i v_i, \quad u_i, v_i \in V_T^*, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$3) X_1 \rightarrow x, \quad x \in V_T^*.$$

Evident, dacã într-o asemenea gramaticã avem $S = X_p$, atunci neterminalii $X_{p+1}, \dots, X_k$ pot fi eliminați deoarece ei nu apar în nici o derivare.

Teorema 10.5. *Un limbaj este generat de o gramaticã contextualã simplã compusã G_1^n dacã și numai dacã el poate fi generat cu o gramaticã liniarã strict secvențialã cu n neterminale.*

Demonstrație. Fie G_1^n o gramaticã contextualã simplã compusã cu $G_i = (V_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Construim gramatica liniarã $G = (V_N, V_T, X_n, P)$ unde

$$V_N = \{X_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$P = \{X_i \rightarrow u X_i v \mid \langle u, v \rangle \in C_i, \quad 1 \leq i \leq n\} \cup$$

$$\cup \{X_i \rightarrow X_{i-1} \mid 2 \leq i \leq n\} \cup \{X_1 \rightarrow x \mid x \in B_1\}.$$

Orice șir din limbajul G_1^n este de forma $z_n z_{n-1} \dots z_1 z w_1 \dots w_n$ unde $z \in B_1$, $z_i = u_1^{(i)} \dots u_s^{(i)}$, $w_i = v_1^{(i)} \dots v_t^{(i)}$, $s \geq 0$, $\langle u_j^{(i)}, v_j^{(i)} \rangle \in C_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Un asemenea șir poate fi ușor generat în raport cu gramatica G . Pe de altã parte, șirurile din limbajul $L(G)$ sînt de aceeași formã, deci $L(G) = L(G_1^n)$ și avem o implicație din enunț.

Invers, fie $G = (V_N, V_T, S, P)$ o gramatică liniară strict secvențială cu $V_N = \{X_1, \dots, X_n\}$. Construim următoarele gramatici contextuale simple:

$$G_1 = (V_T, \{x \mid X_1 \rightarrow x \in P, x \in V_T^*\}, \{\langle u, v \rangle \mid X_1 \rightarrow uX_1v \in P\}),$$

$$G_i = (V_T, L(G_{i-1}), \{\langle u, v \rangle \mid X_i \rightarrow uX_iv \in P\}), i = 2, 3, \dots, n.$$

Din nou, egalitatea $L(G) = L(G_1^n)$ este ușor de verificat și teorema este demonstrată.

Corolar. Pentru orice n există limbaje contextuale simple compuse L pentru care $\text{Var}(L) = n$.

Demonstrație. Fie $V_n = \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ și fie gramatica liniară $G = (V_N, V_n, X_n, P)$ unde

$$V_N = \{X_1, \dots, X_n\},$$

$$P = \{X_i \rightarrow a_iX_ib_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_i \rightarrow X_{i-1} \mid 2 \leq i \leq n\} \cup \{X_1 \rightarrow \lambda\}.$$

Se poate verifica ușor că $\text{Var}(L(G)) = n$. Conform teoremei anterioare, acest limbaj este contextual simplu compus.

Lema 10.1. Oricare ar fi $G_1^n = (G_1, \dots, G_n)$, cu $G_i = (V_i, B_i, C_i)$, o gramatică contextuală simplă compusă există $H_1^n = (G'_1, \dots, G'_n)$ astfel încît $G'_i = (V_i, B_i, C'_i)$ cu $C'_i \cap C'_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$ și $L(G_1^n) = L(H_1^n)$.

Demonstrație. Evident, din orice gramatică contextuală simplă compusă se poate elimina contextul $\langle \lambda, \lambda \rangle$ fără a modifica limbajul generat. Pe mulțimea contextelor pe un vocabular dat considerăm următoarea relație de preordine totală: $\langle u, v \rangle \leq \langle w, z \rangle$ dacă și numai dacă $|u| < |w|$ sau $|u| = |w|$ și $|v| \leq |z|$.

Vom demonstra lema după inducție după n .

Fie gramatica $G_1^2 = (G_1, G_2)$, $G_i = (V_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2$. Să presupunem că există un context $\langle u, v \rangle \in C_1 \cap C_2$. Gramatica G_1 rămîne neschimbată, iar G_2 se modifică în felul următor. Fie mulțimea

$$C_{2\langle u, v \rangle} = (C_2 - \{\langle u, v \rangle\}) \cup \{\langle uw, zv \rangle, \langle wu, vz \rangle \mid \langle w, z \rangle \in C_2\}.$$

Deoarece $\langle \lambda, \lambda \rangle \notin C_1 \cup C_2$, rezultă că $C_1 \cap C_{2\langle u, v \rangle}$ nu mai conține contextul $\langle u, v \rangle$. Evident, $\langle u, v \rangle \leq \langle uw, zv \rangle$, $\langle u, v \rangle \leq \langle wu, vz \rangle$ și contextul $\langle u, v \rangle$ este diferit de oricare dintre celelalte două contexte. Aplicăm procedura anterioară pentru orice context din $C_1 \cap C_2$ în ordinea dată de relația $\leq$ modificînd continuu mulțimea $C_2, C_{2\langle u, v \rangle}, \dots$. Evident, după cel mult card C_1 repetări ale acestei proceduri obținem o mulțime C'_2 disjunctă de C_1 . Fie $G'_2 = (V_2, B_2, C'_2)$. Orice aplicare a unui context $\langle u, v \rangle \in C_1 \cap C_n$ este realizată în gramatica G'_2 cu ajutorul contextelor $\langle uw, zv \rangle, \langle wu, vz \rangle$. (Printre ele se găsește și $\langle uu, vv \rangle$ deci putem realiza orice număr de aplicări ale acestui context.) Singura aplicare care nu se poate face în G'_2 este pentru derivări de forma $x \Rightarrow \Rightarrow uxv$, $x \in L(G_1)$. Dar, deoarece $\langle u, v \rangle \in C_1$, rezultă că $uxv \in L(G_1)$. În concluzie, $L(G_1^2) = L(H_1^2)$ cu $H_1^2 = (G_1, G'_2)$, deci pentru $n = 2$ lema este demonstrată.

Presupunem proprietatea adevărată pentru n oarecare și fie o gramatică contextuală simplă compusă G_1^{n+1} . Pentru gramatica G_1^n se poate aplica procedura anterioară și se poate astfel construi gramatica echivalentă H_1^n cu mulțimile de contexte disjuncte. Putem deci presupune că $G_i = (V_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, și $C_1, \dots, C_n$ sînt două cîte două disjuncte. Procedura din prima parte a demonstrației poate fi acum aplicată pentru a construi o mulțime de contexte C'_{n+1} disjunctă de $\bigcup_{i=1}^n C_i$. Prin urmare, $C_i \cap C'_{n+1} = \emptyset$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$. Luăm $H_1^{n+1} = (G_1, \dots, G_n, G'_{n+1})$, cu $G'_{n+1} = (V_{n+1}, B_{n+1}, C'_{n+1})$. Egalitatea $L(G_1^{n+1}) = L(H_1^{n+1})$ este evidentă și lema este demonstrată.

Teorema 10.6. *Orice limbaj contextual simplu compus este limbaj contextual programat.*

Demonstrație. Fie $G_1^n = (G_1, \dots, G_n)$ o gramatică contextuală simplă compusă cu $G_i = (V_i, B_i, C_i)$, $1 \leq i \leq n$. Conform lemei anterioare, putem presupune că $C_i \cap C_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$. Construim următoarea gramatică contextuală programată: (G, ψ) , $G = (V_n, B_1, \bigcup_{i=1}^n C_i)$, cu

$$\psi: \left(B_1 \cup \bigcup_{i=1}^n C_i \right) \rightarrow \mathcal{P} \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right)$$

definită prin

$$\psi(x) = C_1 \text{ dacă } x \in B_1,$$

$$\psi(\langle u, v \rangle) = C_i \cup C_{i+1} \text{ dacă } \langle u, v \rangle \in C_i.$$

Ținînd seama că mulțimile C_i sînt disjuncte, rezultă că funcția ψ controlează derivarea astfel încît să se urmeze ordinea indicată de $G_1, \dots, G_n$. Egalitatea $L(G_1^n) = L(G)$ este evidentă.

Reciproca teoremei anterioare nu este adevărată.

Teorema 10.7. *Există un limbaj contextual programat care nu este limbaj contextual simplu compus.*

Demonstrație. Fie limbajul $L = \{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$. În secțiunea 7.2 am văzut că acest limbaj este contextual programat. Să presupunem că există o gramatică contextuală simplă compusă $G_1^n = (G_1, \dots, G_n)$, $G_i = (V_i, B_i, C_i)$, $1 \leq i \leq n$, care generează acest limbaj. În B_1 și C_1 nu pot apare ambele simboluri a și b deoarece ar însemna că $L(G_1)$ conține șiruri în care apar ambele simboluri. Deoarece $L(G_1) \subseteq L(G_1^n)$, acest lucru este imposibil. Să presupunem că $L(G_1^n)$ conține apariții numai ale unui singur simbol dintre a și b . Rezultă că și mulțimea C_{i+1} trebuie să conțină apariții ale aceluiași simbol, altfel, din nou, $L(G_1^n)$ ar conține șiruri de forma $xaby$ sau $xbay$. În concluzie, toate gramaticile G_i introduc un singur simbol, deci $L(G_1^n) \subseteq \{a\}^*$ sau $L(G_1^n) \subseteq \{b\}^*$. Contradicție, deci limbajul L nu poate fi generat de o gramatică contextuală simplă compusă.

Teorema 10.8. *Compunerea nu mărește puterea generativă a gramaticilor contextuale selective.*

Demonstrație. Fie G_1^2 cu $G_i = (V_i, B_i, C_i, \varphi_i)$, $\varphi_i: V_i^* \rightarrow \mathcal{P}(C_i)$. Construim gramatica contextuală selectivă $G = (V_2, B_1, C_1 \cup C_2, \varphi)$ unde aplicația $\varphi: V_2^* \rightarrow \mathcal{P}(C_1 \cup C_2)$ este definită astfel:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cup \varphi_2(x) \text{ dacă } x \in L(G_1),$$

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) \text{ dacă } x \in L(G_1^2) - L(G_1),$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ dacă } x \notin L(G_1^2).$$

Incluziunea $L(G_1^2) \subseteq L(G)$ este evidentă.

Fie $x \in L(G)$, $x = u_n \dots u_1 y v_1 \dots v_n$, $y \in B_1$, $\langle u_1, v_1 \rangle \in \varphi(y)$, $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi(u_{i-1} \dots u_1 y v_1 \dots v_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots, n$. Dacă $x \notin L(G_1)$, atunci există k astfel încît $u_k \dots u_1 y v_1 \dots v_k \in L(G_1)$ dar $u_i \dots u_1 y v_1 \dots v_i \notin L(G_1)$ pentru orice $i > k$. Rezultă că $\langle u_i, v_i \rangle \in \varphi_2(u_{i-1} \dots u_1 y v_1 \dots v_{i-1})$ pentru orice $i > k$. Prin urmare, $x = u_n \dots u_{k+1} z v_{k+1} \dots v_n$, cu $z \in L(G_1)$, deci $x \in L(G_1^2)$. Dacă $x \in L(G_1)$, atunci rezultă direct că $x \in L(G_1^2)$, deci $L(G) \subseteq L(G_1^2)$. În concluzie, $L(G_1^2) \in \mathcal{S}$ și teorema este demonstrată.

Teorema 10.9. *Compunerea mărește puterea generativă a gramaticilor contextuale interioare.*

Demonstrație. Fie gramaticile

$G_1 = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{\langle ab, \lambda \rangle\})$, $G_2 = (\{a, b, c, d\}, L(G_1), \{\langle cd, \lambda \rangle\})$. Să notăm cu D_{xy} limbajul lui Dyck peste vocabularul $\{x, y\}$ și cu $x|_V$ șirul obținut prin ștergerea din șirul x a tuturor simbolurilor care nu sînt în vocabularul V . Se poate vedea ușor că avem egalitățile

$$L(G_1) = D_{ab},$$

$$L(G_1^2) = \{x \in \{a, b, c, d\}^* \mid x|_{\{a, b\}} \in D_{ab}, x|_{\{c, d\}} \in D_{cd} \text{ și nu există subșiruri ale lui } x \text{ de forma } czd, z \in \{a, b\}^+\}.$$

Limbajul $L(G_1^2)$ nu este în familia $\mathcal{S}$. Într-adevăr, fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală interioară care generează limbajul $L(G_1^2)$. Deoarece $D_{ab} \subseteq L(G_1^2)$, rezultă că există în C cel puțin un context de forma $\langle u, v \rangle$, $u, v \in \{a, b\}^*$, cu $N(a, uv) = N(b, uv) > 0$. Pe de altă parte, $D_{cd} \subseteq L(G_1^2)$ deci există în C un context de forma $\langle u', v' \rangle$, $u', v' \in \{c, d\}^*$ cu $N(c, u'v') = N(d, u'v') > 0$. Să presupunem că $u'v'$ nu conține subșirul cd . Rezultă că $u'v' = d^i c^i$, $i > 0$. Pentru orice șir $z \in L(G)$ șirul $u', v'z = d^i c^i z$ este în limbajul $L(G)$. Asemenea șiruri nu sînt limbajul $L(G_1^2)$. Prin urmare, $u'v'$ conține un subșir cd . Fie atunci $z \in L(G)$ un șir oarecare. Rezultă că $u'v'z \in L(G)$. Să presupunem că $u'v'z = wcdw'z$. Aplicînd contextul $\langle u, v \rangle$ putem obține șirul $wcu vdw'z$. Acest șir nu este în limbajul $L(G_1^2)$. În consecință, limbajul $L(G_1^2)$ nu poate fi generat de o gramatică contextuală interioară.

10.3. Reprezentări ale limbajelor contextuale

În general, printr-o reprezentare se înțelege posibilitatea de a scrie un limbaj printr-o expresie care implică o serie de operații cu limbaje și limbaje particulare, eventual mai simple decît limbajul reprezentat. De exemplu, orice limbaj de tip 0 se poate scrie sub forma $h(L_1 \cap L_2)$, unde h este un homomorfism iar L_1, L_2 sînt limbaje independente de context ([87]).

Unele rezultate asemănătoare se pot obține și pentru limbajele contextuale.

Teorema 10.10. *Orice limbaj contextual simplu (selectiv sau generalizat) poate fi scris ca reuniune de limbaje contextuale simple (respectiv, selective sau generalizate) cu $Baz(L_i) = 1$ (respectiv, pentru cazul generalizat, $Baz_1(L_i) = Baz_2(L_i) = 1$).*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă și fie gramaticile

$$G_x = (V, \{x\}, C, \varphi), x \in B.$$

Evident, $L(G) = \bigcup_{x \in B} L(G_x)$. Pentru limbajele contextuale simple și selective afirmația din enunț este verificată.

Fie $G = (V, B_1, B_2, C)$ o gramatică contextuală generalizată. Evident,

$$L(G) = \bigcup_{\substack{x \in B_1 \\ y \in B_2}} L(G_{xy})$$

pentru $G_{xy} = (V, \{x\}, \{y\}, C)$ cu $x \in B_1, y \in B_2$ și teorema este demonstrată.

Descompuneri de tipul anterior au fost folosite deja în demonstrațiile teoremelor 3.8, 3.15. Evident, rezultate similare pot fi obținute pentru toate tipurile de gramatici contextuale. Pe de altă parte, dacă toate limbajele $L(G_x)$ sau $L(G_{xy})$ sînt de tip i în ierarhia lui Chomsky, atunci și limbajul $L(G)$ este de tip i . (Toate familiile $\mathcal{L}_i$ sînt închise la reuniune). Reciproca acestei proprietăți nu este adevărată, deși ea ar putea fi utilă în rezolvarea problemei deschise P1, de exemplu.

Teorema 10.11. *Există o gramatică contextuală generalizată G astfel încît limbajul $L(G)$ este regulat dar nici unul dintre limbajele $L(G_{xy})$ nu este regulat.*

Demonstrație. Fie gramatica contextuală generalizată

$$G = (\{a, b\}, \{\lambda\}, \{a, b\}, \{\langle a, \lambda \rangle, \langle \lambda, b \rangle, \langle \lambda, \lambda \rangle\})$$

Evident, avem

$$L(G) = L(G_{\lambda a}) \cup L(G_{\lambda b}),$$

$$L(G_{\lambda a}) = \{a^n a^{n+m+p} b^m \mid n, m, p \geq 0\} = \{a^r b^q \mid r \geq q \geq 0\},$$

(Contextul $\langle a, \lambda \rangle$ este folosit de n ori, contextul $\langle \lambda, b \rangle$ este folosit de m ori, iar $\langle \lambda, \lambda \rangle$ de p ori.)

$$L(G_{\lambda b}) = \{a^n b^{n+m+p} b^m \mid n, m, p \geq 0\} = \{a^r b^q \mid q \geq r \geq 0\}.$$

Evident, limbajele $L(G_{\lambda a})$ și $L(G_{\lambda b})$ nu sînt regulate (monoidul lor sintactic este infinit). Deoarece $L(G_{\lambda a}) \cup L(G_{\lambda b}) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ și acest limbaj este regulat (deci $L(G)$ este regulat), demonstrația este completă.

Teorema 10.12. *Există o gramatică contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ astfel încît $L(G)$ este limbaj regulat, dar $L(G_x)$ nu este independent de context pentru nici un șir $x \in B$.*

Demonstrație. Fie gramatica contextuală selectivă

$$G = (\{a\}, \{a, a^2\}, \{\langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, a^2 \rangle, \langle \lambda, a^4 \rangle\}, \varphi)$$

unde

$$\varphi(a^{2^n}) = \{\langle \lambda, a^2 \rangle\} \text{ pentru } 2n \neq 2^k \text{ sau } 2n \neq 2^k - 2, k \geq 1,$$

$$\varphi(a^{2^k-2}) = \{\langle \lambda, a^4 \rangle\}, k \geq 1,$$

$$\varphi(a^{2^{n+1}}) = \{\langle \lambda, a^2 \rangle\}, n \geq 1,$$

$$\varphi(a^{2^k-1}) = \{\langle \lambda, a \rangle\}, k \geq 1,$$

$$\varphi(a^k) = \emptyset \text{ în alte cazuri.}$$

Să observăm că avem egalitățile

$$L(G_a) = \{a^{2^{n+1}} | n \geq 0\} \cup \{a^{2^n} | n \geq 1\},$$

$$L(G_{aa}) = \{a^{2^n} | n \geq 1\} - \{a^{2^n} | n \geq 1\}.$$

Într-adevăr, plecînd de la şirul a putem folosi contextul $\langle \lambda, a^2 \rangle$ pentru a obține orice şir a^k cu k impar. Singurele şiruri a^k cu k par care se pot obține plecînd de la şirul a sînt cele cu $k = 2^r$, şi anume, prin folosirea o singură dată a contextului $\langle \lambda, a \rangle$. De la şiruri a^{2^r} nu se mai poate deriva în continuare.

Fie acum o derivare în raport cu G_{aa} . Folosind contextul $\langle \lambda, aa \rangle$ putem deriva orice şir a^{2^n} cu $2n$ cuprins între $2^k + 2$ şi $2^{k+1} - 2$, inclusiv. Trecerea de la $2^k - 2$ la $2^k + 2$ se poate face folosind contextul $\langle \lambda, a^4 \rangle$. Alte utilizări ale contextelor nu se mai pot face.

Limbajele $\{a^{2^{n+1}} | n \geq 0\}$ şi $\{a^{2^n} | n \geq 1\}$ sînt regulate. Avem egalitățile

$$L(G_a) - \{a^{2^{n+1}} | n \geq 0\} = \{a^{2^n} | n \geq 1\},$$

$$\{a^{2^n} | n \geq 1\} - L(G_{aa}) = \{a^{2^n} | n \geq 1\}.$$

Deoarece $\{a^{2^n} | n \geq 1\}$ nu este limbaj regulat (şi nici independent de context) iar familia $\mathcal{L}_3$ este închisă la diferență, rezultă că nici limbajele $L(G_a)$, $L(G_{aa})$ nu sînt regulate (deci nici independente de context). Avem însă egalitatea

$$L(G) = L(G_a) \cup L(G_{aa}) = \{a^n | n \geq 1\}$$

şi acest limbaj este evident regulat.

Teorema 10.13. *Există o gramatică contextuală simplă G astfel încît limbajul $L(G)$ este regulat, dar nu toate limbajele $L(G_x)$ sînt regulate.*

Demonstrație. Fie gramatica

$$G = (\{a, b\}, \{\lambda, b\}, \{\langle a, a \rangle, \langle \lambda, a \rangle, \langle \lambda, b \rangle\}).$$

Obținem, evident,

$$L(G_\lambda) = \{a, b\}^*,$$

$$L(G_b) = \left\{ a^r b a^{i_1} x_1 a^{i_2} \dots a^{i_p} x_p \mid r \geq 0, i_s \geq 0, r = \sum_{s=1}^p i_s, x_i \in \{a, b\}^* \right\}.$$

Rezultă că $L(G) = L(G_\lambda) = \{a, b\}^*$ deci limbajul $L(G)$ este regulat. Limbajul $L(G_b)$ nu este însă regulat. Într-adevăr, să-l intersectăm cu limbajul regulat $R = \{a^i b a^j \mid i, j \geq 0\}$. Obținem $L(G_b) \cap R = \{a^i b a^j \mid 0 \leq i \leq j\}$. Limbajul $L(G_b) \cap R$ nu este regulat, deci nici limbajul $L(G_b)$ nu este regulat (familia $\mathcal{L}_3$ este închisă la intersecție) și teorema este demonstrată.

Un alt gen de reprezentări va fi prezentat în paragraful următor. Reprezentări care să implice alte operații decît reuniunea rămîn a fi căutate (*problema* P27).

10.4. Forme gramaticale contextuale

Una dintre ariile recent introduse și puternic cercetate la ora actuală în teoria limbajelor formale este teoria formelor gramaticale care oferă un cadru de investigare a „asemănării” gramaticale a limbajelor.

Definiția 10.3. O *formă gramaticală* este un 6-uplu $F = (N, T, V_N, V_T, S, P)$ unde N și T sînt vocabulare infinite numărabile iar $G_F = (V_N, V_T, S, P)$ este o gramatică Chomsky cu $V_N \subset N$, $V_T \subset T$.

Dîndu-se o formă gramaticală ca mai sus, o *interpretare* a ei este un 5-uplu $I = (s, N_I, T_I, S_I, P_I)$, unde s este o substituție finită astfel încît

1) $s(a) \subset T^*$ pentru $a \in V_T$, $s(A) \subset N$ pentru $A \in V_N$, $s(A) \cap s(B) = \emptyset$ pentru $A, B \in N_N$, $A \neq B$,

2) $S_I \in s(S)$,

3) N_I și T_I conțin toate simbolurile care apar în P_I ,

4) P_I este o submulțime a mulțimii $s(P) = \{x \rightarrow y \mid \text{există o regulă } z \rightarrow w \text{ în } P \text{ astfel încît } x \in s(z) \text{ și } y \in s(w)\}$.

Gramatica $G_I = (N_I, T_I, S_I, P_I)$ se numește gramatică a interpretării I . Mulțimea tuturor acestor gramatici asociate unei forme F se notează cu $\mathcal{G}(F)$, iar mulțimea limbajelor generate de ele se notează cu $\mathcal{L}(F)$.

O familie $\mathcal{L}$ de limbaje se numește *familie gramaticală* dacă există o formă gramaticală F astfel încît $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F)$. Se poate interpreta această egalitate ca o afirmație asupra asemănării gramaticale a limbajelor din familia $\mathcal{L}$.

În continuare se prezintă cîteva rezultate asupra formelor gramaticale contextuale. Investigații suplimentare sînt necesare (*problema* P28), mai ales că teoremele de mai jos indică faptul că familiile de limbaje contextuale au o mare omogenitate (sînt gramaticale).

Definiția 10.4. O *formă gramaticală contextuală simplă* este un quadruplu $F = (T, V, B, C)$ unde T este un vocabular numărabil, iar (V, B, C) este o gramatică contextuală simplă cu $V \subset T$. O interpretare a acestei forme este un quadruplu $I = (s, V_s, B_s, C_s)$ unde $s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(V_s^*)$ este o substituție finită, $V_s \subset T$, $B_s \subseteq s(B)$ și $C_s \subseteq \{\langle u, v \rangle \mid \text{există } \langle u', v' \rangle \text{ în } C \text{ astfel încît } u \in s(u'), v \in s(v')\}$.

În mod cu totul analog putem defini formele gramaticale contextuale generalizate și interioare.

Teorema 10.14. *Familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ sînt familii gramaticale.*

Demonstrație. Fie forma gramaticală contextuală simplă $F = (T, \{a\}, \{a\}, \{\langle a, a \rangle\})$. Evident $\mathcal{L}(F) \subseteq \mathcal{C}$. Să considerăm însă o gramatică contextuală simplă oarecare, $G = (V, B, C)$. Fie substituția finită s definită prin $s(a) = \{u | \langle u, v \rangle \in C\} \cup \{v | \langle u, v \rangle \in C\} \cup B$. Evident $B \subseteq s(\{a\})$ și $C \subseteq \{\langle u, v \rangle | u \in s(a), v \in s(a)\}$. Prin urmare, $I = (s, V, B, C)$ este o interpretare a formei F și gramatica G este gramatica acestei interpretări. În consecință, $L(G) \in \mathcal{L}(F)$, deci $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}(F)$.

Considerînd derivări interioare, construcția anterioară arată că și familia $\mathcal{I}$ este gramaticală.

Familia limbajelor contextuale generalizate este caracterizată de forma gramaticală $F = (T, \{a\}, \{a\}, \{\langle a, a \rangle\})$. (Pentru o gramatică $G = (V, B_1, B_2, L)$ dată, definim substituția finită $s(a) = B_1 \cup B_2 \cup \{u | \langle u, v \rangle \in C\} \cup \{v | \langle u, v \rangle \in C\}$.)

Definiția 10.5. O formă gramaticală contextuală selectivă este un 5-uplu $F = (T, V, B, C, \varphi)$ unde T este un vocabular numărabil, $V \subseteq T$, și (V, B, C, φ) este o gramatică contextuală selectivă.

O interpretare a acestei gramatici este un 5-uplu $I = (s, V_s, B_s, C_s, \varphi_s)$ unde $s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(V_s^*)$ este o substituție finită, $B_s \subseteq s(B)$, $C_s \subseteq \{\langle u, v \rangle | \text{există } \langle u', v' \rangle \in C \text{ astfel încît } u \in s(u'), v \in s(v')\}$, iar $\varphi_s: V_s^* \rightarrow \mathcal{P}(C_s)$ astfel încît dacă $x \in s(y)$, $y \in V^*$, atunci $\varphi_s(x) \subseteq \{\langle u, v \rangle | \text{există } \langle u', v' \rangle \in \varphi(y) \text{ astfel încît } u \in s(u'), v \in s(v')\}$.

Teorema 10.15. *Familia $\mathcal{S}$ este gramaticală.*

Demonstrație. Fie forma gramaticală contextuală selectivă

$$F = (T, \{a\}, \{a\}, \{\langle a, a \rangle\}, \varphi_0)$$

cu $\varphi_0(a^n) = \{\langle a, a \rangle\}$ oricare ar fi $n \geq 0$.

Evident, $\mathcal{L}(F) \subseteq \mathcal{S}$. Invers, fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă. Considerăm substituția finită $s: \{a\}^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ definită prin $s(a) = B \cup \{u | \langle u, v \rangle \in C\} \cup \{v | \langle u, v \rangle \in C\}$. Evident, $B \subseteq s(\{a\})$, $C \subseteq \{\langle u, v \rangle | u \in s(a), v \in s(a)\}$. Să considerăm și funcția $\varphi_s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(C)$ definită astfel:

$$\varphi_s(x) = \varphi(x) \text{ pentru } x \in s(\{a\}^*),$$

$$\varphi_s(x) = \emptyset \text{ pentru } x \notin s(\{a\}^*) \text{ (evident, } x \notin L(G)).$$

Obținem interpretarea $I = (s, V, B, C, \varphi_s)$ a cărei gramatică asociată, $G_I = (V, B, C, \varphi_s)$, este evident echivalentă cu gramatica G . În concluzie, $L(G) \in \mathcal{L}(F)$ și $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}(F)$.

Definițiile și rezultatele anterioare pot fi reproduse cu modificările corespunzătoare și pentru alte clase de gramatici contextuale. Cum este de așteptat, faptul că gramaticile contextuale se „aseamănă” foarte mult între ele, implică faptul că și limbajele contextuale se aseamănă structural.

Observația 10.1. Din faptul că orice limbaj contextual (selectiv) poate fi obținut cu ajutorul unei interpretări a unei unice forme gramaticale, iar o interpretare se bazează pe o substituție finită, nu rezultă faptul că există un unic limbaj contextual (selectiv) astfel încît orice alt limbaj contextual (selectiv) este imaginea printr-o substituție finită a acestui limbaj.

Într-adevăr, să presupunem că ar exista o gramatică contextuală $G = (V, B, C, \varphi)$ astfel încît orice limbaj $L \in \mathcal{S}$ este de forma $L = s(L(G))$ s substituție finită. Să presupunem că avem $\text{card } V = n$. Fie limbajul contextual $L = \bigcup_{i=1}^{n+1} \{a_i^j \mid j \geq 0\}$. Fie $s: V^* \rightarrow \mathcal{P}(V_{n+1}^*)$, $V_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ o substituție finită astfel încît $L = s(L(G))$. Deoarece $a_1^j \in L$ pentru orice $j \geq 0$, rezultă că există cel puțin un simbol $b_1 \in V$ astfel încît $s(b_1)$ conține șiruri de forma a_1^r , $r > 0$. Deoarece s este substituție finită, trebuie ca limbajul $L(G)$ să conțină șiruri în care apar subșiruri b_1^t cu t arbitrar de mare. Dacă în $s(b_1)$ ar apare și șiruri care conțin un simbol a_j , $j \neq 1$, atunci, dintr-un șir xb_1yb_1z din $L(G)$ s-ar putea obține cu ajutorul lui s șiruri care conțin atît pe a_1 cît și pe a_j , $j \neq 1$. Asemenea șiruri nu sînt în limbajul L . În concluzie, $s(b_1) \subseteq \{a_1\}^*$. Raționamentul anterior este valabil pentru orice a_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Prin urmare, vocabularul V trebuie să conțină cel puțin $n+1$ simboluri distincte. Contradicție. Limbajul L nu poate fi egal cu $s(L(G))$ pentru nici o substituție finită s .

Probabil că nici pentru familia $\mathcal{C}$ nu există un limbaj $L \in \mathcal{C}$ astfel încît orice limbaj $L' \in \mathcal{C}$ să fie de forma $L' = s(L)$, s substituție finită (problema P29). Totuși, este adevărat următorul rezultat particular care arată o omogenitate deosebită a familiei limbajelor contextuale simple.

Teorema 10.16. *Oricare ar fi $n \geq 0$ există un limbaj $L \in \mathcal{C}$ astfel încît orice limbaj $L' \in \mathcal{C}$ cu $\text{Con}(L') \leq n$ este de forma $L' = s(L)$, s substituție finită.*

Demonstrație. Fie următoarea gramatică contextuală simplă

$$G_n = (V_n, \{a_0\}, \{\langle a_i, b_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\})$$

cînd $V_n = \{a_i, b_i \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{a_0\}$. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică nontextuală simplă oarecare cu $C = \{\langle u_i, v_i \rangle \mid 1 \leq i \leq k\}$, $k \leq n$. Considerăm următoarea substituție finită $s: V_n^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ definită prin

$$s(a_0) = B,$$

$$s(a_i) = \{u_i\}, \quad s(b_i) = \{v_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$s(a_i) = s(b_i) = \{\lambda\} \text{ pentru } i = k+1, \dots, n.$$

Orice șir din limbajul $L(G_n)$ este de forma $a_{i_1} \dots a_{i_r} a_0 b_{i_1} \dots b_{i_r}$, iar orice șir din $s(L(G_n))$ este de forma $u'_{i_1} \dots u'_{i_r} x v'_{i_1} \dots v'_{i_r}$ cu $x \in B = s(a_0)$ și cu $u'_{i_s} = v'_{i_s} = \lambda$ dacă $i_s \geq k+1$, dar $\langle u'_{i_s}, v'_{i_s} \rangle = \langle u_{i_s}, v_{i_s} \rangle$ pentru $1 \leq i_s \leq k$. Egalitatea $L(G) = s(L(G_n))$ este deci evidentă și teorema este demonstrată.

10.5. Proprietatea prefixului pentru limbajele contextuale

Definiția 10.6. Un limbaj $L \subseteq V^*$ se zice *limbaj prefixat* dacă și numai dacă oricare ar fi $x, y \in L$, sau avem $x \in \text{Pref}(y)$, sau avem $y \in \text{Pref}(x)$. O familie $\mathcal{L}$ de limbaje are *proprietatea prefixului* dacă și numai dacă orice limbaj prefixat din $\mathcal{L}$ este regulat.

O serie de familii de limbaje dintre cele mai importante au această proprietate: $\mathcal{L}_2$ [5], $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{SM}$ [38] etc. (Orice familie $\mathcal{L}$ de limbaje închisă la intersecție cu limbaje regulate și homomorfisme λ -libere pentru care orice limbaj $L \in \mathcal{L}$, $L \subseteq \{a\}^*$ este regulat, are proprietatea prefixului [38]).

Deoarece orice limbaj contextual simplu este independent de context (teorema 3.5) și orice limbaj contextual generalizat este simplu matricial (teorema 3.15), rezultă că familiile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{G}$ au proprietatea prefixului. Familia $\mathcal{S}$ nu are această proprietate deoarece conține limbaje neregulate peste vocabularul $\{a\}$. Este evident că orice limbaj peste acest vocabular este prefixat; familia $\mathcal{S}$ conține deci limbaje prefixate neregulate (vezi exemplul 2.8).

Se pot obține însă unele rezultate mai precise în legătură cu limbajele contextuale prefixate.

Teorema 10.17. *Oricare ar fi $L \subseteq V^*$, $L \in \mathcal{I}$ un limbaj prefixat, există $x \in V^*$ astfel încât $L \subseteq \{x\}^* \text{Pref}(x)$.*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală interioară astfel încât limbajul $L(G)$ este prefixat. Dacă $C = \emptyset$ sau $C = \{\langle \lambda, \lambda \rangle\}$ atunci $L(G) = B$ și cel mai lung șir din B se poate lua ca șir x . Dacă există un context $\langle u, v \rangle \in C$ cu $|uv| > 0$, atunci rezultă cu limbajul $L(G)$ este infinit și orice șir de forma $z_n = (uv)^n y$, $y \in B$ este în $L(G)$. Fie $z \in L(G)$ un șir oarecare. Există n astfel încât $|z| < |(uv)^n|$. Deoarece $z \in \text{Pref}(z_n)$, rezultă că $z \in \text{Pref}((uv)^n)$, prin urmare, $z = (uv)^i w$, $w \in \text{Pref}(uv)$. Luăm $x = uv$ și teorema este demonstrată.

Teorema 10.18. *Oricare ar fi $L \subseteq V^*$, $L \in \mathcal{C}$ sau $L \in \mathcal{IS}$ un limbaj prefixat, există $x, y \in V^*$ astfel încât $L \subseteq \text{Pref}\{xy^n \mid n \geq 1\}$.*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă. Dacă $C = \emptyset$ sau $C = \{\langle \lambda, \lambda \rangle\}$, atunci rezultatul se obține imediat luând pe x egal cu cel mai lung cuvânt din B și pe y egal cu λ . Fie $\langle u, v \rangle \in C$ cu $|uv| > 0$. Dacă $u \neq \lambda$, atunci $u^n z v^n \in L$ pentru orice $n \geq 1$, $z \in B$. Luăm $x = \lambda$, $y = u$. Dacă $u = \lambda$, atunci $z v^n \in L$ pentru orice $z \in B$, $n \geq 1$ și luăm $x = z$, $y = v$ și teorema este demonstrată pentru cazul limbajelor contextuale simple.

Fie $G = (V, B, C, \phi)$ o gramatică contextuală interioară selectivă. Din nou, cazurile $C = \emptyset$ și $C = \{\langle \lambda, \lambda \rangle\}$ sînt banale. Fie $\langle u, v \rangle \in C$ cu $uv \neq \lambda$, $\langle u, v \rangle \in \phi(t)$ pentru un șir t care apare cu subșir al unui șir din $L(G)$. Fie ztw un asemenea șir. Rezultă că toate șirurile de forma $zu^n t v^n w$ sînt în limbajul $L(G)$. Dacă $u \neq \lambda$, atunci luăm $x = z$, $y = u$, iar dacă $u = \lambda$, atunci punem $x = zt$, $y = v$ și condițiile de enunț sînt verificate ușor ținînd seama că limbajul $L(G)$ este prefixat.

10.6. Automate contextuale

În teoria gramaticilor Chomsky, legătura cu automatele este o problemă foarte importantă. Pentru acele familii de limbaje contextuale care sînt incluse în unele familii din ierarhia lui Chomsky ($\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}(n)$) recunoașterea limbajelor se poate face cu ajutorul automatelor care caracterizează familiile din ierarhia lui Chomsky. Se pune însă problema considerării de automate specifice, care să caracterizeze familiile de limbaje contextuale. Unele variante de astfel de automate vor fi introduse în cele ce urmează.

Definiția 10.7. Un automat contextual este un sistem

$$A = (K, V, P, s_0, F)$$

unde $K = Kd \cup Ks \cup F$ este mulțimea stărilor și $Kd \cap Ks = \emptyset$, $F \cap (Kd \cup Ks) = \emptyset$ (Kd este mulțimea stărilor corespunzătoare mișcărilor spre dreapta, Ks este mulțimea stărilor corespunzătoare mișcărilor spre stînga, iar F este mulțimea stărilor finale), V este vocabularul automatului, $s_0 \in Ks$ este starea inițială, iar P este mulțimea finită a regulilor de mișcare a automatului. Aceste reguli sînt de următoarele patru forme:

$$P = Pu \cup Pv \cup Pd \cup Ps$$

1) Pu conține reguli de forma $\pi s x \rightarrow x \pi s'$, $s \in Ks$, $s' \in Kd \cup F$, $x \in V^*$ (reguli de tip u),

2) Pd conține reguli de forma $sa \rightarrow as'$, $s, s' \in Kd$, $a \in V$ (reguli de mișcare spre dreapta),

3) Pv conține reguli de forma $sx\tau \rightarrow s'\tau x$, $s \in Kd$, $s' \in Ks$, $x \in V^*$ (reguli de tip v),

4) Ps conține reguli de forma $as \rightarrow s'a$, $s, s' \in Ks$, $a \in V$ (reguli de mișcare spre stînga).

Simbolurile π și τ sînt simboluri în afara lui V interpretate ca marcaje. Definim relația $\Rightarrow$ peste $(V \cup \{\pi, \tau\})^*$ în modul uzual. Limbajul recunoscut de automatul A este

$$L(A) = \{x \in V^* \mid \text{există } x_1, x_2 \in V^* \text{ astfel încît } x = x_1 x_2 \text{ și}$$

$$\pi s_0 x \tau \stackrel{\star}{\Rightarrow} x_1 \pi s \tau x_2, s \in F\}.$$

Recunoașterea unui șir de către un automat contextual decurge astfel. Se plasează șirul între marcatorii π și τ împreună cu starea inițială s_0 . Automatul mută simbolul π spre dreapta și simbolul τ spre stînga, explorînd șirul de la stînga la dreapta cu capul său de citire, după care acesta se reîntoarce lîngă simbolul π și își reia drumul spre dreapta. La revenirea în stînga și între mutarea simbolurilor π și τ șirul curent nu se schimbă; se poate însă schimba starea automatului. Dacă simbolurile π și τ ajung alături, separate numai de o stare finală, atunci șirul inițial este recunoscut. Automatele contextuale lucrează deci într-un mod asemănător automatelor de contracție [88] folosite pentru recunoașterea unor familii de limbaje generate de gramatici cu restricții în derivare.

Unele variante ale automatelor contextuale sînt de interes.

Definiția 10.8. Un automat contextual este *d-constant* dacă $Pd = \{sa \rightarrow as \mid s \in Kd, a \in V\}$. (Cu alte cuvinte, automatul nu-și schimbă starea între mutarea simbolului π și mutarea simbolului τ .)

Un automat contextual este *s-constant* dacă $Ps = \{as \rightarrow sa \mid a \in V, s \in Ks\}$.

Un automat contextual este *(d, s)-constant* dacă este simultan *d-constant* și *s-constant*.

Un automat contextual este *reduc* dacă are $Ks = \{s_0\}$ (este deci și *s-constant*). Un automat contextual *d-constant* și *reduc* se numește *simplu*.

Vom nota cu $\mathcal{A}$ familia limbajelor recunoscute de automatele contextuale fără restricții, cu $\mathcal{AS}$ familia limbajelor recunoscute de automatele contextuale simple, cu $\mathcal{A}_s$ familia limbajelor recunoscute de automatele contextuale *(d, s)-constante* și cu $\mathcal{SR}$ familia limbajelor recunoscute de automatele contextuale reduse.

Să comparăm familiile anterioare cu familiile de limbaje contextuale.

Teorema 10.19. *Avem egalitatea $\mathcal{AS} = \mathcal{C}$ (automatele contextuale simple caracterizează limbajele contextuale simple).*

Demonstrație. Fie $G = (V, B, C)$ o gramatică contextuală simplă. Construim următorul automat contextual simplu: $A = (K, V, P, s_0, F)$ cu $K = Kd \cup Ks \cup F$, $Kd = \{s_u \mid \langle u, v \rangle \in C\}$, $Ks = \{s_0\}$, $F = \{s_f\}$ și $P = Pu \cup Pd \cup Pv \cup Ps$ unde

$$Pu = \{\pi s_0 u \rightarrow u \pi s_u \mid \langle u, v \rangle \in C\} \cup \{\pi s_0 x \rightarrow x \pi s_f \mid x \in B\},$$

$$Pd = \{s_u a \rightarrow a s_u \mid a \in V, \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$Pv = \{s_u v \tau \rightarrow s_0 \tau v \mid \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$Ps = \{a s_0 \rightarrow s_0 a \mid a \in V\}.$$

Fie $z = u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \in L(G)$. Următoarea derivare este corectă în raport cu automatul A : $\pi s_0 u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \tau \Rightarrow u_n \pi s_u u_{n-1} \dots u_1 x v_1 \dots v_n \tau \xRightarrow{\star} u_n \pi u_{n-1} \dots s_u v_n \tau \Rightarrow u_n \pi u_{n-1} \dots s_0 \tau v_n \xRightarrow{\star} u_n \pi s_0 u_{n-1} \dots v_{n-1} \tau v_n \xRightarrow{\star} u_n \dots u_1 \pi s_0 x \tau v_1 \dots v_n \Rightarrow u_n \dots u_1 x \pi s_f \tau v_1 \dots v_n$. Prin urmare, $z \in L(A)$, deci $L(G) \subseteq L(A)$. Incluziunea inversă se poate verifica la fel de ușor, deci $L(G) = L(A)$ și $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{AS}$.

Fie și automatul contextual simplu $A = (K, V, P, s_0, F)$. Construim gramatica contextuală simplă $G = (V, B, C)$ cu

$$B = \{x \in V^* \mid \text{există regula } \pi s_0 x \rightarrow x \pi s \in Pu, s \in F\},$$

$$C = \{\langle u, v \rangle \mid \text{există } s_u \in Kd \text{ astfel încît } \pi s_0 u \rightarrow u \pi s_u \in Pu, s_u v \tau \rightarrow s_0 \tau v \in Pv\}.$$

Egalitatea $L(G) = L(A)$ este ușor de verificat ținînd seama că automatul A este redus și (d, s) -constant. În concluzie, $\mathcal{AS} \subseteq \mathcal{C}$ și teorema este demonstrată.

Teorema 10.20. *Avem egalitatea $\mathcal{AS}_{(d,s)} = \mathcal{CP}_v$ (automatele contextuale (d, s) -constante caracterizează limbajele contextuale programate cu contexte terminale).*

Demonstrație. Fie (G, ψ) , $G = (V, B, C, T)$, o gramatică contextuală programată cu T mulțime a contextelor finale (este deci o gramatică v -contextuală). Construim automatul contextual $A = (K, V, P, s_0, F)$ cu

$$Kd = \{s_{u,v} \mid \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$Ks = \{s'_{u,v} \mid \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$F = \{s_f\},$$

$$Pu = \{\pi s_0 u \rightarrow u \pi s_{u,v} \mid \langle u, v \rangle \in T\} \cup \\ \cup \{\pi s'_{u,v} u' \rightarrow u' \pi s_{u',v'} \mid \langle u, v \rangle \in \psi(\langle u', v' \rangle)\} \cup \\ \cup \{\pi s'_{u,v} x \rightarrow x \pi s_f \mid \langle u, v \rangle \in \psi(x), x \in B\},$$

$$Pd = \{s_{u,v} a \rightarrow a s_{u,v} \mid a \in V, \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$Pv = \{s_{u,v} v \tau \rightarrow s'_{u,v} \tau v \mid \langle u, v \rangle \in C\},$$

$$Ps = \{a s'_{u,v} \rightarrow s'_{u,v} a \mid a \in V, \langle u, v \rangle \in C\}.$$

Fie $z = u_n \dots u_1 x v_1 \dots v_n \in L(G)$ cu $x \in B$, $\langle u_1, v_1 \rangle \in \psi(x)$, $\langle u_i, v_i \rangle \in \psi(\langle u_{i-1}, v_{i-1} \rangle)$, $i = 2, 3, \dots, n$. Există deci regulile $\pi s'_{u_1, v_1} x \rightarrow x \pi s_f \in Pu$, $\pi s'_{u_i, v_i} u_{i-1} \rightarrow u_{i-1} \pi s_{u_{i-1}, v_{i-1}} \in Pu$, $s_{u_i, v_i} v_i \tau \rightarrow s'_{u_i, v_i} \tau v_i \in Pv$ pentru toți indicii i potriviți; deoarece $\langle u_n, v_n \rangle \in T$, există regulile $\pi s_0 u_n \rightarrow u_n \pi s_{u_n, v_n} \in Pu$, $s_{u_n, v_n} v_n \tau \rightarrow s'_{u_n, v_n} \tau v_n \in Pv$. Ținînd seama de componența mulțimilor Pd și Ps , rezultă că șirul z poate fi recunoscut de automatul A , deci $L(G, \psi) \subseteq L(A)$. Incluziunea inversă poate fi verificată în același mod, deci $L(G, \psi) = L(A)$ și $\mathcal{CP}_\psi \subseteq \mathcal{A}_{ds}$.

Fie acum un automat contextual (d, s) -constant, $A = (K, V, P, s_0, F)$. La o trecere de la simbolul π la τ se folosește o regulă din Pu de forma $\pi s u \rightarrow u \pi s_u$, o serie de reguli de forma $s_u a \rightarrow a s_u$, $a \in V$, și o regulă $s_u v \tau \rightarrow s'_{u, v} \tau v$. Starea s'_u circulă spre stînga neschimbată și reia mutarea simbolurilor π și τ . Fiecărei perechi (u, v) , corespunzătoare unei mișcări complete ca mai sus îi corespund deci două stări $s_u \in Kd$ și $s'_u \in Ks$. Le vom nota cu $s_{u, v}$ și $s'_{u, v}$, deoarece depind, de fapt, și de șirul v . Notăm cu C mulțimea tuturor contextelor $\langle u, v \rangle$ asociate perechilor (u, v) identificate ca mai sus. Fie și mulțimile

$$B = \{x \in V^* \mid \text{există regula } \pi s x \rightarrow x \pi s' \in Pu, s' \in F\},$$

$$T = \{\langle u, v \rangle \mid \text{există } s_{u, v} \in Kd \text{ astfel încît } \pi s_0 u \rightarrow u \pi s_{u, v} \in Pu \text{ și } s_{u, v} v \tau \rightarrow s'_{u, v} \tau v \in Ps\}.$$

Definim și funcția $\psi: (B \cup C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ prin

$$\psi(x) = \{\langle u, v \rangle \in C \mid \text{există } s'_{u, v} \in Ks \text{ astfel încît regula } \pi s'_{u, v} x \rightarrow x \pi s' \text{ este în } Pu, s' \in F\},$$

$$\psi(\langle u, v \rangle) = \{\langle u', v' \rangle \in C \mid \text{există } s'_{u', v'} \in Ks \text{ astfel încît } \pi s'_{u', v'} u' \rightarrow u' \pi s_{u', v'} \text{ este o regulă din } Pu\}.$$

Considerăm gramatica ν -contextuală programată (G, ψ) cu $G = (V, B, C)$. Egalitatea $L(G, \psi) = L(A)$ este ușor de verificat, deci $\mathcal{A}_{ds} \subseteq \mathcal{CP}_\psi$ și demonstrația este completă.

Lema 10.2. *Avem incluziunea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_1$.*

Demonstrație. Fie $A = (K, V, P, s_0, F)$ un automat contextual arbitrar. Considerăm gramatica $G = (V_N, V, S, P')$ cu

$$V_N = K \cup \{\pi, \tau, S, X\},$$

$$P' = \{S \rightarrow \pi s_0 X \tau\} \cup \{X \rightarrow aX, X \rightarrow a \mid a \in V\} \cup$$

$$\cup \{S \rightarrow \lambda \mid \lambda \in L(A)\} \cup P \cup \{\pi s \tau \rightarrow \lambda \mid s \in F\}.$$

Egalitatea $L(A) = L(G)$ este imediată. Deoarece gramatica G are spațiul de lucru mărginit, rezultă că $L(G) \in \mathcal{L}_1$ deci $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_1$.

Teorema 10.21. *Sînt adevărate incluziunile stricte $\mathcal{C} \subset \mathcal{AR} \subset \mathcal{S}_c$.*

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{AS} = \mathcal{C}$ (teorema 10.19) și $\mathcal{AS} \subseteq \mathcal{AR}$, incluziunea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{AR}$ este verificată. Pentru a arăta că ea este strictă să considerăm limbajul $L = \{a^n \mid n \geq 1\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$. Acest limbaj nu este în familia $\mathcal{C}$, dar poate fi recunoscut cu următorul automat contextual redus: $A = (K, \{a, b\}, P, s_0, F)$,

$$Kd = \{s_a, s_b\}, Ks = \{s_0\}, F = \{s_f\},$$

$$Pu = \{\pi s_0 a \rightarrow a \pi s_a, \pi s_0 a \rightarrow a \pi s_f, \pi s_0 b \rightarrow b \pi s_b, \pi s_0 b \rightarrow b \pi s_f\},$$

$$Pd = \{s_a a \rightarrow a s_a, s_b b \rightarrow b s_b\},$$

$$Pv = \{s_a\tau \rightarrow s_0\tau, s_b\tau \rightarrow s_0\tau\},$$

$$Ps = \{as_0 \rightarrow s_0a, bs_0 \rightarrow s_0b\}.$$

Egalitatea $L(A) = L$ este evidentă, deci $L \in \mathcal{AR}$.

Fie $A = (K, V, P, s_0, F)$ un automat contextual redus ($K = Kd \cup \{s_0\} \cup F$). Construim următoarea gramatică contextuală selectivă: $G = (V, B, C, \varphi)$ cu

$$B = \{x \in V^* \mid \text{există } s \in F \text{ astfel încît } \pi s_0 x \rightarrow x \pi s \in Pu\},$$

$$C = \{\langle u, v \rangle \mid \text{există } s_u, s_v \in Kd \text{ astfel încît } \pi s_0 u \rightarrow u \pi s_u \in Pu, s_v v \tau \rightarrow s_0 \tau v \in Pv\},$$

$$\varphi(x) = \{\langle u, v \rangle \in C \mid uxv \in L(A)\} \text{ pentru } x \in L(A),$$

$$\varphi(x) = \emptyset \text{ pentru } x \notin L(A).$$

Egalitatea $L(A) = L(G)$ este evidentă. Deoarece $L(A) \in \mathcal{L}_1$ (lema anterioară), rezultă că funcția φ este calculabilă algoritmic, deci $L(A) \in \mathcal{S}_c$ și $\mathcal{AR} \subseteq \mathcal{S}_c$.

Deoarece $\mathcal{AR} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_1$, dar $\mathcal{S}_c$ conține limbaje nedependente de context (teorema 3.12), rezultă că incluziunea $\mathcal{AR} \subset \mathcal{S}_c$ este strictă.

Corolar. Automatele contextuale reduse nu caracterizează nici una dintre familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{JS}$.

Conform teoremei anterioare, $\mathcal{AR} \neq \mathcal{C}$, $\mathcal{AR} \neq \mathcal{S}$. Deoarece familiile $\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{JS}$ conțin limbaje care nu sînt în $\mathcal{S}$ (teoremele 3.3 și 3.4) rezultă că nici egalitățile $\mathcal{AR} = \mathcal{L} \in \{\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{JS}\}$ nu sînt adevărate.

Teorema 10.22. Familia $\mathcal{A}$ este incomparabilă cu $\mathcal{S}$.

Demonstrație. Conform lemei 10.2, rezultă că $\mathcal{S} - \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Invers, fie limbajul $L = \{ab^n a \mid n \geq 1\}$. Acest limbaj nu este în familia $\mathcal{S}$, dar este recunoscut de următorul automat contextual: $A = (K, \{a, b\}, P, s_0, F)$ cu

$$Kd = \{s_a, s_b\}, Ks = \{s_0, s_1\}, F = \{s_f\},$$

$$Pu = \{\pi s_0 a \rightarrow a \pi s_a, \pi s_1 b \rightarrow b \pi s_b, \pi s_f b \rightarrow b \pi s_f\},$$

$$Pd = \{s_a b \rightarrow b s_a, s_b b \rightarrow b s_b\},$$

$$Pv = \{s_a a \tau \rightarrow s_1 \tau a, s_b \tau \rightarrow s_1 \tau\},$$

$$Ps = \{as_1 \rightarrow s_1 a\}.$$

Limbajul L este deci în familia $\mathcal{A}$ și teorema este demonstrată.

Corolar. Incluziunea $\mathcal{AR} \subset \mathcal{A}$ este strictă.

Într-adevăr, $\mathcal{AR} \subset \mathcal{S}_c$ (teorema 10.21), dar $\mathcal{A} - \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Corolar. Automatele contextuale nu caracterizează nici una dintre familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{JS}$.

Limbajul $L = \{ab^n a \mid n \geq 1\}$ nu aparține nici uneia dintre familiile $\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{S}$. Pe de altă parte nu putem avea nici $\mathcal{A} = \mathcal{JS}$ deoarece familia $\mathcal{JS}$ conține limbaje nerecursiv enumerabile (corolarul teoremei 3.10), dar $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_1$ (lema 10.2).

Numai automatele contextuale simple și automatele (d, s) -constante răspund deci cerinței de a caracteriza familii de limbaje contextuale. Definirea unor noi clase de automate care să caracterizeze și alte familii de limbaje contextuale rămîne o *problemă deschisă* (P30).

10.7. Comparația cu ξ -gramaticile lui L. Nebesky

În [48] se introduce un tip de mecanism generativ asemănător cu gramaticile contextuale din mai multe puncte de vedere: ambele au o motivare lingvistică precisă, nu folosesc simboluri auxiliare și nici reguli de rescriere, ambele folosesc — într-un anume sens — contexte în procesul generării unui limbaj. Compararea celor două tipuri de gramatici se impune ca foarte naturală.

Fie V un vocabular și fie $u, v, w, z \in V^*$. Între aceste șiruri are loc relația ξ (scriem $\xi(u, v, w, z)$) dacă și numai dacă există $x, y \in V^*$, $p, q, r \in V^+$ astfel încât $u = xry$, $v = xrqy$, $w = xpry$ și $z = xprqy$. În [48] se demonstrează că dacă avem $\xi(u, v, w, z)$ și $\xi(u, v, w, z')$, pentru $u, v, w, z, z' \in V^*$, atunci $z = z'$.

Fie și $L \subseteq V^*$ un limbaj oarecare. Notăm

$$\xi(L) = L \cup \{z \in V^* \mid \text{există } u, v, w \in L \text{ astfel încât } \xi(u, v, w, z)\}.$$

Definim astfel un operator $\xi^*: \mathcal{P}(V^*) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ prin

$$\xi^*(L) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \xi^i(L)$$

unde $\xi^0(L) = L$, $\xi^i(L) = \xi(\xi^{i-1}(L))$, $i \geq 1$.

Definiția 10.9. O ξ -gramatică este un triplet $G = (V, B, \xi^*)$, unde V este un vocabular, $B \subseteq V^*$ este un limbaj finit peste V , iar ξ^* este operatorul definit mai sus. Limbajul generat de această gramatică este $L(G) = \xi^*(B)$.

Notăm cu $\mathcal{L}_\xi$ familia limbajelor generate de ξ -gramatici. (Le vom numi ξ -limbaje.)

Scopul paragrafului de față este studierea raporturilor dintre familia $\mathcal{L}_\xi$ și familiile de limbaje contextuale.

Lema 10.3. Fie V un vocabular și $B \subseteq V^*$ un limbaj oarecare. Dacă există $x, y \in V^*$ și $a \in V$ astfel încât xay și $xaay \in B$, atunci orice șir $xa^n y$, $n \geq 1$, este în $\xi^*(B)$.

Demonstrație. Fie șirul $u = xay$. Luăm $r = a$, $p = a$, $q = a$. Deoarece $xaay \in B$, rezultă că avem $\xi(xay, xaay, xaay, xaaay)$, deci $xa^3y \in \xi^*(B)$. Să presupunem că $xa^i y \in \xi^n(B)$ pentru $i = 1, 2, \dots, n$ și să considerăm șirurile $u = xa^{n-1}y$, $v = xa^n y = w$. Rezultă că $\xi(u, v, w, xa^{n+1}y)$, deci $xa^{n+1}y \in \xi^{n+1}(B)$. Procedura de inducție fiind completă, rezultă că $xa^n y \in \xi^*(B)$ pentru orice $n \geq 1$.

Teorema 10.23. Familia $\mathcal{L}_\xi$ este incomparabilă cu $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$.

Demonstrație. Evident, dacă $L \in \mathcal{L}_\xi$, atunci $\xi^*(L) = L$.

Fie limbajul $L = \{a, aa\}$. Conform lemei 10.3, rezultă că $\xi^*(L)$ este un limbaj infinit. Dacă $L \in \mathcal{L}_\xi$, atunci $\xi^*(L) = L$. Contradicție. Limbajul finit $\{a, aa\}$ nu poate fi în familia $\mathcal{L}_\xi$, dar el aparține tuturor familiilor de limbaje contextuale.

Invers, fie ξ -gramatica $G = (\{a, b\}, \{aba, abba\}, \xi^*)$. Conform lemei 10.3, avem $\{ab^n a \mid n \geq 1\} \subseteq L(G)$. Incluziunea inversă este evidentă, deci $L(G) = \{ab^n a \mid n \geq 1\}$. Limbajul $\{ab^n a \mid n \geq 1\}$ nu este însă în familiile $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$ deoarece nu are proprietățile K și K' . Se poate vedea ușor că acest limbaj nu este nici în familia $\mathcal{I}$ și teorema este demonstrată.

Se poate vedea imediat că și limbajul $\{a^n \mid n \geq 1\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$ este în familia $\mathcal{L}_\xi$. (El este generat de ξ -gramatica $G = (\{a, b\}, \{a, aa, b, bb\}, \xi^*)$.) Nici acest limbaj nu este în familiile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{I}$.

Evident, și familia $\mathcal{I}\mathcal{S}$ conține limbaie în afara familiei $\mathcal{L}_\xi$; nu știm însă dacă $\mathcal{L}_\xi \subseteq \mathcal{I}\mathcal{S}$ sau nu. De asemenea, relația dintre $\mathcal{L}_\xi$ și $\mathcal{T}$ rămâne a fi precizată (*problema P31*). Credem că avem $\mathcal{L}_\xi \subseteq \mathcal{T}$; mai mult, probabil că $\mathcal{L}_\xi \subseteq \mathcal{L}_2$. (Conform teoremei 3.18 va rezulta atunci că $\mathcal{L}_\xi \subseteq \mathcal{T}$.)

10.8. Caracterizarea limbajelor contextuale cu ajutorul ecuațiilor

Fie V un vocabular și $U = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ o mulțime de simboluri care nu se găsesc în V . Orice șir $x \in (V \cup U)^*$ se numește *monom*; elementele din U care apar în x se numesc *variabile*. Gradul monomului x este egal cu numărul de apariții în x ale simbolurilor din U .

monoamele $m_1, \dots, m_s$ peste $V \cup U$. Fiecare monom poate fi interpretat ca un operator de la $(\mathcal{P}(V^*))^n$ cu valori în $\mathcal{P}(V^*)$ definit astfel: $m_i(L_1, L_2, \dots, L_n)$ este limbajul obținut înlocuind fiecare apariție a simbolului X_j în m_i cu limbajul L_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Are atunci sens să scriem $m_1 \cup m_2 \cup \dots \cup m_s$ și să spunem că avem un *polinom* peste $V \cup U$. Gradul polinomului respectiv este egal cu gradul maxim al monoamelor sale. Vom nota cu $p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un asemenea polinom. Numim ecuație peste $V \cup U$ o expresie de forma $X_i = p(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Putem astfel vorbi despre *sisteme de ecuații* peste $V \cup U$ și despre soluțiile lor. Dându-se un sistem $X_i = p_i(X_1, \dots, X_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, se poate demonstra că soluția sa este cel mai mic punct fix al operatorului $[p_1, \dots, p_n]: (\mathcal{P}(V^*))^n \rightarrow (\mathcal{P}(V^*))^n$ definit prin

$$[p_1, \dots, p_n](L_1, L_2, \dots, L_n) = (p_1(L_1, \dots, L_n), \dots, p_n(L_1, \dots, L_n)).$$

O caracterizare elegantă a limbajelor independente de context [22], [87] spune că un limbaj este independent de context dacă și numai dacă este componentă a soluției unui sistem de ecuații ca acela de mai sus.

Trecerea de la o gramatică independentă de context $G = (V_N, V_T, S, P)$ la un sistem de ecuații se face astfel. Atașăm fiecărui neterminat A_i din V_N un simbol X_i . Din fiecare șir x pentru care există o regulă $A_i \rightarrow x$ în P obținem un monom peste $V_T \cup U$ ($U = \{X_i \mid A_i \in V_N\}$) înlocuind orice apariție a simbolurilor $A_j \in V_N$ cu X_j . Pentru un simbol A_i din V_N scriem ecuația $X_i = p_i(X_1, \dots, X_r)$, $r = \text{card } V_N$, unde $p_i(X_1, \dots, X_r)$ este polinomul obținut reunind toate monoamele m_{ij} asociate tuturor regulilor $X_i \rightarrow x_{ij}$ din P .

De exemplu, dacă $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb, A \rightarrow aB, B \rightarrow bBa, B \rightarrow ba, S \rightarrow ab\})$, atunci sistemul obținut este următorul:

$$X_1 = X_2X_3 \cup ab$$

$$X_2 = aX_2b \cup aX_2$$

$$X_3 = bX_3a \cup ba$$

Se vede imediat că dându-se o gramatică 1-liniară, sistemul asociat este de forma $X = p(X)$, unde p este un polinom de gradul 1. Ținând seama de teorema 3.5, rezultă deci că avem

Teorema 10.24. *Un limbaj este contextual simplu dacă și numai dacă este soluția unei ecuații de forma $X = p(X)$, unde p este un polinom de gradul 1 (cu alte cuvinte, $L \in \mathcal{C}$ dacă și numai dacă L este punctul fix minimal al unui polinom de gradul întâi cu o singură variabilă).*

Deoarece toate celelalte familii de limbaje contextuale considerate în lucrare depășesc familia limbajelor independente de context, rezultă că nu putem obține caracterizări la fel de simple pentru alte clase de limbaje contextuale.

În [32] se reușește însă caracterizarea limbajelor contextuale selective într-un mod similar celui de la limbajele contextuale simple.

Fie V un vocabular și $\alpha = (L_1, \dots, L_k)$ un k -uplu ordonat de limbaje peste V . Definim operatorul $\psi_\alpha: \mathcal{P}(V^*) \rightarrow (\mathcal{P}(V^*))^k$ prin

$$\psi_\alpha(L) = (L \cap L_1, L \cap L_2, \dots, L \cap L_k).$$

Notăm cu $\mathcal{O}(V^*)$ mulțimea tuturor operatorilor ψ_α ca mai sus și pentru un polinom $p(X_1, \dots, X_n)$ și un operator ψ_α , $\alpha = (L_1, \dots, L_n)$ notăm $p \circ \psi_\alpha: \mathcal{P}(V^*) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ operatorul definit prin $p \circ \psi_\alpha(L) = p(\psi_\alpha(L))$, $L \subseteq V^*$. În [32] se demonstrează că avem

Teorema 10.25. *Un limbaj $L \subseteq V^*$ este în familia $\mathcal{S}$ dacă și numai dacă el este soluția minimală a unei ecuații de forma $X = p \circ \psi_\alpha(X)$, unde p este un polinom de gradul 1 cu n variabile iar $\psi_\alpha \in \mathcal{O}(V^*)$, α având n componente.*

Trecerea de la gramatici contextuale selective la ecuația din enunț și invers se face astfel. Fie $G = (V, B, C, \varphi)$ o gramatică contextuală selectivă și fie $L_1, L_2, \dots, L_t \subseteq V^*$, $L_i \in V^*/\varphi$ și $\varphi(x) \neq \emptyset$ pentru $x \in L_i$. Fie $\alpha = (L_1, \dots, L_t)$ și fie $C_i = \varphi(x)$, $x \in L_i$. Considerăm polinoamele

$$p_i(X_i) = \bigcup_{\langle u, v \rangle \in C_i} uX_iv$$

și construim polinomul

$$p(X_1, \dots, X_t) = B \cup \bigcup_{j=1}^t p_j(X_j).$$

Ecuația asociată gramaticii este construită cu ajutorul acestui polinom și a t -uplului α .

Invers, dându-se un polinom $p(X_1, \dots, X_t)$ și un operator ψ_α cu $\alpha = (L_1, \dots, L_t)$, se construiește gramatica contextuală selectivă $G = (V, B, C, \varphi)$ unde $B = p(\emptyset, \dots, \emptyset)$, C este mulțimea contextelor care apar în monomurile din p , iar φ se definește astfel. Dacă în polinomul p apare monomul uX_iv , atunci $\langle u, v \rangle \in \varphi(x)$, pentru orice $x \in L_i$.

Pentru ambele construcții de mai sus, limbajul generat de gramatica G coincide cu punctul fix minimal al operatorului $p \circ \psi_\alpha$ corespunzător.

Indicații bibliografice. Rezultatele din secțiunile 10.1, 10.2 (cu excepția implicației „dacă” din teorema 10.5 și a teoremei 10.9) și 10.3 (cu excepția teoremei 10.13) se găsesc în [72]. Pentru studiul monoidului sintactic al limbajelor independente de context se poate consulta [86]; compunerea gramaticilor Chomsky a fost definită în [2] și studiată în [67]. Rezultatele din secțiunile 10.4, 10.5 și 10.6 apar pentru prima dată aici. Formele gramaticale (independente de context) au fost introduse în [11]; bibliografia acestui domeniu este deja foarte bogată. Proprietatea prefixului a fost introdusă în [5] și studiată și în [38]. Pentru noțiunile din secțiunea 10.7 s-au dat deja referințe bibliografice acolo.

BIBLIOGRAFIE

1. S. ABRAHAM, *Some questions of phrase-structure grammars*. Comput. Ling., **4** (1965), 61—70.
2. S. ABRAHAM, *Compound and serial grammars*, Inform. Control, **20** (1972), 432 — 438.
3. A. V. AHO, J. D. ULLMAN, *The theory of parsing, translation and compiling*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs., N. J., 1972.
4. V. AMAR, G. PUTZOLU, *On a family of linear grammars*. Inform. Control, **7** (1964), 283—291.
5. R. BOOK, *On languages with a certain prefix property*. Math. Systems Theory, **10**, 3 (1976/77), 229—237.
6. V. B. BORSCEV, *Okrestnostnye gramatiki*. N.T.I., Ser. 2, **11** (1967), 39—41.
7. AL. CĂRĂUȘU, GH. PĂUN, *String intersection and short concatenation*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **26**, 5 (1981), 713—726.
8. N. CHOMSKY, *Three models for the description of languages*, IRE Transaction on Information Theory, IT-2, **3** (1956), 113—124.
9. N. CHOMSKY, *On certain formal properties of grammars*. Inform. Control, **2** (1959), 137—167.
10. I. CREANGĂ, C. REISHER, D. SIMOVICI, *Introducere algebrică în informatică. Limbaje formale*. Editura Junimea, Iași, 1974.
11. A. CREMERS, S. GINSBURG, *Context-free grammar forms*. J. of Computer and Syst. Sci., **11**, 1 (1975), 86—117.
12. K. CULIK II, *N-ary grammars and the description of mappings of languages*, Kybernetika, **6**, 2 (1970), 99—117.
13. H. CURRY, *Some logical aspects of grammatical structure*. Proc. of Symp. in Appl. Math., vol. 12, Structure of language and its mathematical aspects, Amer. Math. Soc., 1961, 58 — 68.
14. J. DASSOW, *On the circular closure of languages*. Elek. Inf. und Kybern., **15**, 1/2 (1979), 87 — 94.
15. S. EILENBERG, *Automata, languages and machines*. vol. A, Academic Press, New York, 1974.
16. R. W. FLOYD, *On the non-existence of a phrase-structure grammar for Algol-60*. Comm. of the A.C.M., **5**, 9 (1962), 483—484.
17. S. GINSBURG, *The mathematical theory of context-free languages*. McGraw-Hill Book Comp., New York, 1966.
18. S. GINSBURG, *Algebraic and automata-theoretic properties of formal languages*. North-Holl. Publ. Comp., Amsterdam, Oxford, 1975.
19. S. GINSBURG, S. A. GREIBACH, *Abstract families of languages*. In *Studies in Abstract families of languages*, Mem. of the Amer. Math. Soc., **87**, 1979.
20. S.A. GREIBACH, *The undecidability of the ambiguity problem for minimal linear grammars*. Inform. Control, **6** (1963), 119—125.
21. M. GROSS, *Inherent ambiguity of minimal linear grammars*, Inform. Control, **7** (1964), 366 — 368.
22. M. GROSS, A. LENTIN, *Notions sur les grammaires formelles*. Gauthier-Villars, Paris, 1970.
23. J. GRUSKA, *Some classifications of context-free languages*. Inform. Control, **14** (1969), 152 — 173.
24. J. GRUSKA, *Complexity and unambiguity of context-free grammars and languages*. Inform. Control, **18** (1971), 502 — 519.
25. J. GRUSKA, *Descriptive complexity of context-free languages*. Proc. of Symp. Math. Found. of Computer Sci., High Tatras, 1973, 71 — 83.

26. L. H. HAINES, *Note on the complement of a (minimal) linear language*. Inform. Control, **7** (1964), 307 — 314.
27. I. M. HAVEL, *On the branching structure of languages*. Proc. of Symp. Math. Found. of Computer Sci., Gdansk, 1976, Lecture Notes in Computer Science, **45**, 1976, Springer-Verlag, Berlin.
28. G. HERMAN, G. ROZENBERG, *Developmental systems and languages*. North-Holl. Publ. Comp., Amsterdam, 1975.
29. O. IBARRA, *Simple matrix languages*, Inform. Control, **17** (1970), 359 — 394.
30. S. ISTRAIL, *O problemă despre gramaticile contextuale selective*. Stud. cerc. mat., **30**, 2 (1978), 135 — 140.
31. S. ISTRAIL, *Gramatici contextuale cu selectivitate regulată*. Stud. cerc. mat., **30**, 3 (1978), 287—294.
32. S. ISTRAIL, *A fixed-point approach to contextual languages*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **25**, 6 (1980), 861—869.
33. S. ISTRAIL, X.M. NGUYEN, *N-contextual schemes*. Bull. Math. de la Soc. de Sci. Math. de R.S.R. (va apărea).
34. M. ITO, *Generalized contextual languages*. Cah. ling. th. appl., **11**, 1 (1974), 73—77.
35. J. KRÁL, *A note on grammars with regular restriction*. Kybernetika, **9** (1973), 159—161.
36. A. K. JOSHI, S.R. KOSARAJU, H. M. YAMADA, *String adjunct grammars: I. Local and distributed adjunction*, Inform. Control, **21** (1972), 93—116, II. *Equational representation, null symbols and linguistic relevance*, Inform. Control, **21** (1972), 235—260.
37. S. Y. KURODA, *Classes of languages and linear-bounded automata*. Inform. Control, **7** (1964), 207—223.
38. M. LATTEAUX, *Une note sur la propriété de préfixe*. Math. Systems Theory, **11** (1978), 235 — 238.
39. A. LINDENMAYER, G. ROZENBERG (Eds.), *Automata, languages, development. At the crossroads of biology, mathematics and computer science*. North-Holl. Publ. Comp., Amsterdam, 1976.
40. S. MARCUS, *Gramatici și automate finite*. Editura Academiei R.S.R., București, 1964.
41. S. MARCUS, *Algebraic linguistics. Analytical models*. Academic Press, New York, 1967.
42. S. MARCUS, *Contextual grammars*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **14**, 10 (1969), 1525—1534.
43. S. MARCUS, *Deux types nouveaux de grammaires génératives*. Cah. ling. th. appl., **6** (1969), 69—74.
44. S. MARCUS, *Linguistics as a pilot science*. In *Current trends in linguistics*. Ed. Th. Sebeok, vol. 12, Mouton, The Hague, Paris, 1974.
45. M. MORSE, G. HEDLUNG, *Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semi-groups*. Duke Math. J., **11** (1944), 1—7.
46. P. NAUR (Ed.), *Report on the algorithmic language Algol 60*. Comm. of the A.C.M., **3** (1960), 299 — 314.
47. E. NAVRÁTIL, *Context-free grammars with regular conditions*. Kybernetika, **2**, 6 (1970), 118—126.
48. L. NEBESKY, *The ξ -grammar*. Prague Studies in Math. Ling., **2** (1966), 147—154.
49. X. M. NGUYEN, *3-factorization contextual grammars*. Manuscris, (1980).
50. X. M. NGUYEN, *On the n-contextual grammars*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **25**, 9 (1980), 1395 — 1406.
51. X. M. NGUYEN, *Some classes of n-contextual grammars*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **26**, 9(1981), 1221 — 1233.
52. X.M. NGUYEN, *Closure properties of some classes of contextual languages*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **27**, 7(1982), 61—72.
53. X. M. NGUYEN, *A note on n-contextual grammars*. Analele Univ. din București, **30** (1981), 49—54.
54. X. M. NGUYEN, *N-contextual grammars with syntactical invariant choice*. Found. Control Engineering, **5**, 1(1980), 21—29.
55. X. M. NGUYEN, *N-contextual schemes with control languages*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., (sub tipar).
56. X. M. NGUYEN, *Gramatici de adjuncție dependentă de context*. Stud. cerc. mat., **32**, 5(1980), 549 — 557.
57. X. M. NGUYEN, Gh. PĂUN, *On the generative capacity of n-contextual grammars*. Bull. Math. de la Soc. de Sci. Math. de R.S.R., **25(76)**, 4(1982).
58. M. NOVOTNY, *On a class of contextual grammars*. Cah. ling. th. appl., **11**, 2(1974), 313—316.
59. M. NOVOTNY, *Each generalized contextual language is context sensitive*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **21**, 6 (1976), 353—362.

60. M. NOVOTNY, *On some variants of contextual languages*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **21**, 8 (1976), 1053—1062.
61. M. NOVOTNY, *Contextual grammars vs. context-free algebras*. Czechoslovak Math. J. (1982).
62. A. PASCU, Gh. PĂUN, *On simple matrix languages*. Bull. Math. de la Soc. de Sci. Math. de R.S.R., **20**(68), 3—4 (1976), 333—340.
63. Gh. PĂUN, *Cîteva gramatici dependente de context*. Stud. cerc. mat., **26**, 8(1974), 1105 — 1110.
64. Gh. PĂUN, *Asupra gramaticilor contextuale*. Stud. cerc. mat., **26**, 8 (1974), 1111—1129.
65. Gh. PĂUN, *Complexitatea limbajelor contextuale selective*. Stud. cerc. mat., **27**, 5 (1975), 559—569.
66. Gh. PĂUN, *Asupra proprietății lui Bar-Hillel, Perles și Shamir*. Stud. cerc. mat., **28**, 3(1976), 303 — 309.
67. Gh. PĂUN, *The generative capacity of compound grammars*. Inform. Control, **34** (1977), 50 — 54.
68. Gh. PĂUN, *An operation with languages occurring in the linguistic approach to management*. R.A.I.R.O./Theor. Computer Sci., **11**, 4 (1977), 303 — 310.
69. Gh. PĂUN, *Noi operații cu limbaje*. Stud. cerc. mat., **29**, 5 (1977), 521—533.
70. Gh. PĂUN, *Contextual grammars with restrictions in derivation*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **22**, 8 (1977), 1147—1154.
71. Gh. PĂUN, *On some classes of contextual grammars*. Bull. Math. de la Soc. de Sci. Math. de R.S.R., **22**(70), 2 (1978), 183 — 189.
72. Gh. PĂUN, *Operații cu gramatici și limbaje contextuale*. Stud. cerc. mat., **30**, 4 (1978), 425 — 439.
73. Gh. PĂUN, *An infinite hierarchy of contextual languages with choice*. Bull. Math. de la Soc. de Sci. Math. de R.S.R., **22**(70), 4 (1978), 425—430.
74. Gh. PĂUN, *Two infinite hierarchies of languages defined by branching grammars*. Kybernetika, **14**, 6 (1978), 397—407.
75. Gh. PĂUN, *Asupra unor prelungiri ale limbajelor*. Stud. cerc. mat., **30**, 5 (1978), 511 — 520.
76. Gh. PĂUN, *Marcus' contextual grammars and languages. A survey*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **24**, 10 (1979), 1467—1486.
77. Gh. PĂUN, *On the generative capacity of conditional grammars*. Inform. Control, **43** (1979), 178—186.
78. Gh. PĂUN, *On the family of finite index matrix languages*. J. of Computer and System Sci., **18**, 3 (1979), 267—280.
79. Gh. PĂUN, *Rejection grammars*. Rev. Roum. Ling., **27**, 1 (1980), 101—111.
80. Gh. PĂUN, *Gramatici matriciale*. Editura științifică și enciclopedică, București, 1981.
81. Gh. PĂUN, *Mecanisme generative ale proceselor economice*. Editura tehnică, București, 1981.
82. Gh. PĂUN, *On the strict inclusions between some families of contextual languages*. Analele Univ. Craiova, 1982.
83. Gh. PĂUN, X. M. NGUYEN, *On the inner-contextual grammars*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **25**, 4 (1980), 641—651.
84. E. POST, *A variant of a recursively unsolvable problem*. Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 264—268.
85. J. ROSENKRANTZ, *Programmed grammars and classes of formal languages*. J. of the A.C.M., **16** (1969), 107—131.
86. J. SAKAROVITCH, *Monoides syntactiques et langages algebriques*, These 3ème cycle, Math. Université, Paris VII, 1976.
87. A. SALOMAA, *Formal languages*. Academic Press, New York, London, 1973.
88. S.H. von SOLMS, *The characterization by automata of certain classes of languages in the context sensitive area*. Inform. Control, **27** (1975), 262 — 271.
89. I. BUCURESCU, A. PASCU, *Fuzzy contextual grammars*. I, II, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (sub tipar).
90. J. DASSOW, *Remark on a problem of Nguyen Xuan My and Păun*. Elektr. Inform. und Kybern., **18**, 1/2 (1982), 66—67.
91. B.C. GALIUKSOV, *Polukontekstnie grammatiki*, Matematicheskaya logika i matematicheskaya lingvistika, Univ. de Stat din Kalinin, 1981, 38—50.
92. X. M. NGUYEN, *Some classes of semi-Thue systems*. Elektr. Inform. und Kybern., **16**, 1/3 (1980), 1 — 10.
93. X. M. NGUYEN, *Generalizări ale gramaticilor contextuale*, Teză dr., Facultatea de matematică, Universitatea din București, 1981.
94. X.M. NGUYEN, *Some problems on string adjunct schemata*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (sub tipar).
95. X. M. NGUYEN, Gh. PĂUN, *On the generative capacity of contextual schemata with syntactical invariant choice*. Elektr. Inform. und Kybern., **18**, 1/2 (1982), 57—65.

SUMMARY

The present book is a monograph devoted to one of the most interesting types of specialized generative grammars, namely the contextual grammars introduced by Solomon Marcus in 1969 [42]. These grammars are models of the phenomenon of acceptance of a string by a context according to a given language. This phenomenon can be observed in any language, but it is of great importance in the analytical study of natural languages.

In the twelve years since they have been defined, the contextual grammars were investigated by many authors and many papers were published in this field. Many variants were proposed, many theoretical problems were settled, applications were made. The field literature counts in about fifty studies and very promising investigations are developing. We hope that the present work will give a new impulse to these researches. It contains almost all the known results in this area, presents many unpublished results (unifying and completing the theory), points out the research topics which seem to be important to be attacked and formulates many open problems (identified by P1, P2, ..., P31).

Generally, the study of contextual grammars and languages develops on the same lines as the study of Chomsky grammars: the generative capacity, closure properties, decision problems, recognition automata, etc. One reaches some very modern topics, like the grammar forms, the composition, the prefix property, etc. Also, there are some specific problems. Constantly, the generative capacity of contextual grammars of various types is compared to that of Chomsky grammars.

The book consists of 10 chapters. Chapter 1 is a short introduction to the formal language theory aiming to make the book independent from this point of view. Chapters 2—10 present most of the results obtained so far about contextual grammars and languages. Each chapter ends by bibliographical remarks which indicate the origin of the results and informally present results which have not been introduced in the text.

The author would be very indebted to the reader for any remark about the book (especially for answers to open problems). Mailing address: University of Bucharest, Faculty of Mathematics, Str. Academiei 14, București, 70109 ROMANIA.

CONTENTS

Preface	5
Introduction	9
CHAPTER 1. Notions and results from formal language theory	11
CHAPTER 2. Marcus contextual grammars	22
CHAPTER 3. The generative capacity of Marcus contextual grammars	26
3.1. Necessary conditions for a language to be contextual of various types	26
3.2. The relations between the families of contextual languages	30
3.3. The relations between the families of contextual languages and the families in Chomsky hierarchy	32
3.4. The relations between the families of contextual languages and the families of matrix languages	38
3.5. 3-contextual grammars.	39
CHAPTER 4. Closure properties	43
CHAPTER 5. Decision problems	56
CHAPTER 6. The syntactic complexity of contextual languages. . . .	62
CHAPTER 7. Contextual grammars with restrictions in derivation . .	69
7.1. Matrix contextual grammars	69
7.2. Programmed contextual grammars.	71
7.3. Controlled contextual grammars	74
7.4. Conditional contextual grammars	77
CHAPTER 8. Variants of contextual grammars	84
8.1. γ -contextual grammars	84
8.2. Regular contextual grammars	87
8.3. Contextual grammars with bounded choice	89
8.4. Branching grammars	93
CHAPTER 9. N -contextual grammars.	100
9.1. The generative capacity of n -contextual grammars . . .	100
9.2. Properties of the n -contextual languages families . . .	107
9.3. Conditional n -contextual grammars	110
9.4. N -contextual schemes	119

CHAPTER 10. Other problems about contextual grammars and languages	127
10.1. The syntactic monoid of contextual languages	127
10.2. Compound contextual grammars	128
10.3. Representations of contextual languages	132
10.4. Contextual grammar forms	135
10.5. The prefix property for contextual languages	137
10.6. Contextual automata	138
10.7. The contextual grammars versus Nebesky's ξ -grammars	143
10.8. Equational characterizations of contextual languages	144
References	147
Summary	151

Redactor: LUMINIȚA ZORILESCU
Tehnoredactor: ELENA MATEESCU

*Bun de tipar 26. VII. 1982. Format 16/70 × 100.
Coli de tipar 9,75.
C.Z. pentru biblioteci mari: 41.541.2.01: 007.
C.Z. pentru biblioteci mici: 41.541.2: 007.*



c. 320—I. P. „Informația”,
str. Brezoianu nr. 23—25,
București

Teoria gramaticilor contextuale a fost inițiată de către profesorul Solomon Marcus cu aproximativ un deceniu în urmă (în scopul modelării unor fenomene specifice limbilor naturale). De atunci, aceste gramatici au fost studiate de mai mulți cercetători din R. S. Cehoslovacă, R. D. Germană, Japonia, R. S. Vietnam și din țara noastră, astfel încît s-au acumulat deja multe rezultate, conturînd o teorie matură, bine articulată.

Volumul de față este prima monografie dedicată domeniului; sînt incluse aproape toate rezultatele de pînă acum și sînt, de asemenea, formulate un mare număr de probleme rămase deschise și de direcții de cercetare ulterioară.

Cartea este dedicată deopotrivă matematicienilor, informaticienilor și lingviștilor, tuturor celor interesați în teoria limbajelor formale, mai general, în lingvistică. Cercetătorii și studenții pot găsi variate subiecte de studiu (teoretic sau aplicativ).